7 227

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2

Valószínűleg nem véletlen ...
(Brenyó Mihály)

„Nyitott" és „nyitható" feladatok a tanárképzésben és a matematikaoktatásban
(Ambrus Gabriella)

1997 – 1999, ikerprímek
(Holló-Szabó Ferenc)

Egy felvételi feladat, és ami ennek kapcsán egy tanárnak eszébe juthat
(Laczkó László)

VIII. ÉVFOLYAM 2000 1

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

TARTALOM

Valószínűleg nem véletlen ...
Brenyó Mihály
tanár, Kecskemét

„Nyitott" és „nyitható" feladatok a tanárképzésben és a matematikaoktatásban
Ambrus Gabriella
főiskolai adjunktus, Budapest

1997 – 1999, ikerprímek
Holló-Szabó Ferenc
doktorandusz, Budapest

Egy felvételi feladat, és ami ennek kapcsán egy tanárnak eszébe juthat
Laczkó László
vezető tanár, Budapest

Hírek versenyekről

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve, két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Brenyó Mihály

Valószínűleg nem véletlen ...

A valószínűség-számítás tanítása az 5-8. osztályokban tapasztalataim szerint nagy érdeklődés mellett, jelentős tanulói aktivitással és vitákkal zajló eseménysorozat.

Tanári programomat úgy állítottam össze, hogy e téma mindig a tanév végére essék, és legtöbbször a tanév elején folytatódjon. Az egész tanévben egyenletesen és becsületesen dolgozó diákok már csak javíthatnak év végi jegyükön; a pótlásra szorulók, a korrigálásra kényszerülők tanórán és azon kívül is több tanári segítséget kaphatnak.

Alapvetőnek tartom, hogy sok kísérletet végezzünk, az egyéni véleményeket a várható eseményekről hiánytalanul meghallgassuk, a tapasztalatokat összevessük a várakozásunkkal, és közösen elemezzünk.

A legegyszerűbb feladat az egy pénz feldobásához és a leesés lehetséges eredményeihez kötődik. A mi várható kérdés körül előzetesen nagy vita nem szokott kialakulni. Kezdetben 10 dobást szoktam kérni mindenkitől, és összesített statisztikát készítünk. Így jól összevethető a sok egyéni részeredmény és az összkép. A lehetséges kimenetelek többsége elő szokott fordulni a fej-írás kimutatásban. Ezután párosával játszanak 10-15 percet diákjaim úgy, hogy előzetesen egyikük a fej, másikuk az írás mellett voksolt. A leggyakoribb az, hogy fordított voksolás mellett még játékidőt kérnek az igazságosság érdekében. Azt is természetesnek tartom, hogy másnap játékok sokaságáról számolnak be, és a hangsúly a győzelmeken van. A házi feladat pedig nem a játékhoz kötődik. Az otthoni dobások eredményeit órán összesítjük. (Micsoda jó számolási gyakorlatok ezek!)

Érdekes tapasztalatom, hogy mindenki elfogadja a mások dobását a sajátjával egyenértékűnek és azonos jelentőségűnek. Nem szokott felvetődni, hogy milyen pénzzel és hol dobott. Az összesített kép látványa elemzésre érdemes. Észrevételeit sorban mindenki elmondja. Kiderül, hogy a fej vagy írás hány esetben volt több, és hányszor volt éppen egyenlő. A különbözők között milyen volt a fej-írás többségi aránya. Gyakorta leírjuk a fej-írás különbségeket is egy-egy dobás esetén.

Félosztálynyi diák dobásának összesítése esetén néha már meg is fogalmazódik: ugyanannyi az esélye a fejnek, mint az írásnak, mégis nem mindig lesz egyenlő a gyakoriságuk. A várható esemény tudatában egyáltalán nem biztos, hogy az következik be. Ezek az események tehát véletlen események. Ugyanakkor mégis tudunk róluk valami fontosat!

A két pénzzel végzett kísérletek már nagyobb viták, megosztott közvélemény közepette zajlanak. A lehetséges események felírását mindig egy diák végzi, és a táblán ez áll: II, FF, F vagy I. Ezután mindenki leírja a füzetébe, hogy mit vár a dobások eredményeként, és azt is, hogy szerinte melyikből lesz a legtöbb saját dobásai során. A dobások eredményei felkerülnek a táblára és elhangzanak a leírt előzetes vélemények is. A véleménykülönbségek akörül forognak, hogy miért több – leggyakrabban mindenkinél – a fej vagy írás dobások száma. Természetes, hogy tanítványaim egymással vitatkoznak, vagy éppen egyetértő véleményüket és érveiket fogalmazzák meg. Az én feladatom „csak" a vita kordában tartása. Nem baj, sőt jó, ha nem fejezzük be ezen az órán a vitát.

A kockával dobásokat már várják a gyerekek, mert a társasjáték sokuknak élmény volt. Szomorúan írom le, hogy vannak olyan gyerekek, akik igen kevés ebbéli élménnyel rendelkeznek. Arra azonban többen is emlékeznek és el is mondják, hogy milyen nehéz volt olykor-olykor elkezdeni a játékot, mert először 6-ost kellett hozzá dobni.

Ha egy kockával dobunk 5 percig és összegezzük az egyes dobásértékek gyakoriságait,

akkor már megfigyelhető, hogy az összes dobások egyhatoda körüli számokat kaptunk. Ki is mondjuk, hogy ugyanaz az esélye bármely dobható értéknek.

Dobjunk két kockával, és a dobott számokat adjuk össze! A kísérletek előtt szokták kérni, hogy beszéljük meg: mi várható?

A gyakoriság és a relatív gyakoriság fogalma ekkor már kimondható, és a számításokat a korábbi kísérletekre visszamenőleg is érdemes elvégezni. Fontos, hogy a gyerekek a számításokat elemezve beszéljenek, és várjuk el a megfelelő szakkifejezések használatát is.

A két kockával végzett kísérletek értékelése után érdemes szemléltetni a várható eseményeket és összevetni a tapasztalatokkal.

kocka 1/2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A két pénz dobásánál a szemléltetés utólag:

pénz 1/2	fej	írás
fej	fej-fej	fej-írás
írás	fej-írás	írás-írás

Mindig megfogalmazom két kockára a következő feladatokat is:

- Két kockával egyszerre dobunk, és összeszorozzuk a dobott számokat. Ilyen játékban te mire fogadnál?
- Két kockával dobunk, és kiszámítjuk a dobott számok különbségének abszolút értékét. Te mire gondolsz: melyik eredmény lesz a leggyakoribb, és miért?

Ha elkészítjük a várható események táblázatait azok igen szemléletesek.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Sok dobással, és a kísérletek eredményeinek elemzésével kialakul a diákokban, hogy a várt esemény bekövetkezhet, de pontosan igen ritkán valósul meg.

A legizgalmasabb, a leghosszabb és a legtöbb türelmet kívánó feladat a három kockával történő dobás és a számok összeadása. Ekkorra már tisztázódott, hogy mindegy a kockák színe. A várható eseményeket gyorsan számba vehetjük. A dobások összege $3 \le x \le 18$, $x \in \mathbb{N}$. Itt is célszerű az azonos valószínűségű eseteket megszámolni. Ezek száma $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Mielőtt ezt megtennénk, érdemes fogadásokat ajánlani. Amikor két kockával dobtunk és a dobott számokat összeadtuk, akkor szimmetrikus volt a táblázatunk. Most is azt sejtik a tanulók és így a legtöbb tipp a 10-re és a 11-re szokott lenni.

Ezt követően együtt kiszámítjuk, hogy hányféleképpen dobhatjuk az egyes összegeket:

3 = 1 + 1 + 1	1
4 = 2 + 1 + 1	3
5 = 3 + 1 + 1	
= 2 + 2 + 1	6
6 = 4 + 1 + 1	
= 3 + 2 + 1	10
= 2 + 2 + 2	

Az 1; 3; 6; 10 számokat megfigyelve már szokott lenni hozzászóló: ne számoljunk tovább, ő diktálja: 15; 21; 28; ... . Van olyan diák is, aki felismeri, hogy ezek a háromszögszámok! Kérni szoktam tanítványaim türelmét, hogy számoljunk csak tovább!

7 = 5 + 1 + 1	8 = 6 + 1 + 1
4 + 2 + 1	5 + 2 + 1
3 + 3 + 1	4 + 3 + 1
3 + 2 + 2	3 + 3 + 2
15	**21**

$9 = 6 + 2 + 1$	$10 = 6 + 3 + 1$
$5 + 3 + 1$	$6 + 2 + 2$
$5 + 2 + 2$	$5 + 4 + 1$
$4 + 3 + 2$	$5 + 3 + 2$
$4 + 4 + 1$	$4 + 4 + 2$
$3 + 3 + 3$	$4 + 3 + 3$
25	**27**

Itt álljunk meg egy pillanatra! Miért nem úgy folytatódott, ahogy vártuk? Ez túl fogós kérdés.

Nehezen jönnek rá, hogy a 9 bontásakor a dobókocka miatt 7, 1, 1 nem lehet. Ettől kezdve más a helyzet.

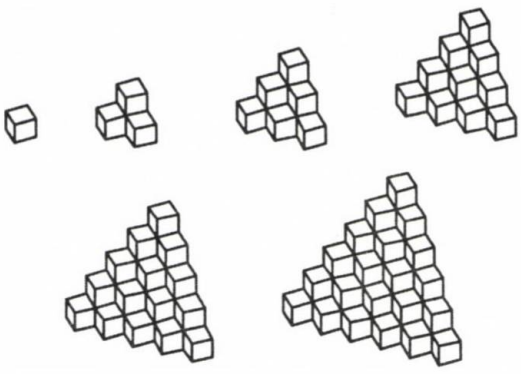
A másik várakozás a szimmetria volt. Nézzük, helyes volt-e?

$11 = 6 + 4 + 1$
$= 6 + 3 + 2$
$= 5 + 5 + 1$
$= 5 + 4 + 2$ 27
$= 5 + 3 + 3$
$= 4 + 4 + 3$

Ezután már elosztva a további számolási feladatot, gyorsan igazolódik a szimmetria.

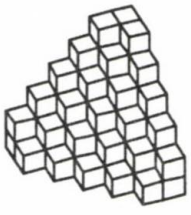
Jó lenne ezt is szemléletessé tenni? Két pénz, két kocka esetén könnyű volt a dolog. Most a sík nem elég, hiszen számhármasok vannak, mégpedig rendezett számhármasok. A tér pontjainak koordinátái! Három évvel ezelőtt tettem kísérletet a szemléltetésre, sikerrel. Akkor 6. osztály végén járó diákjaim vállalták, hogy a nyár folyamán sokszor dobnak három kockával, és elkészítik a dobások statisztikus összesítését. Arra is vállalkoztak, hogy 216 db $5 \times 5 \times 5$ cm-es kockát készítenek vastagabb és színes papírból. Az azonos valószínűségű elemi eseményeknek megfelelően adtuk, illetve beszéltük meg a színeket. Készült 2 fekete, 6 barna, ..., 42 zöld, 50 fehér és 54 piros színű kocka.

A 216 db kockából ezután együtt egy nagy kockát építettünk. Ezek elhelyezése úgy történt, hogy két papírcsík segített látni a térbeli koordinátatengelyek közül kettőt, a harmadik tengely pedig a szintekkel volt megfigyelhető. Az első kocka letett egyik csúcsa megfelelt a (0;0;0) pontnak, ekkor az átellenes csúcs az (1;1;1) pontnak. Ettől kezdve a korábban leírt számhármasoknak megfelelően tettünk le egy kockát, és mondtuk a koordinátáit. Ilyen építményeket, illetve testeket kaptunk:



Amikor a 8 bontásainak megfelelő kockákat is felraktuk, szokott lenni olyan diák, aki úgy véli ez a kocka fele. A vita azonnal kialakul: nem lehet a fele, hiszen van még olyan szín, amilyen sorra sem került! Akkor jön az újabb tipp: az egyharmadánál járunk. Ezután számolunk: $51 : 216 = 7 : 27$, tehát nincs még a harmada sem!

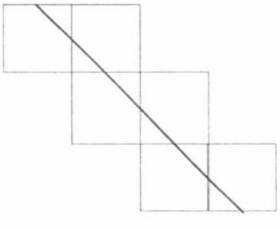
A fehér színű kockákat is rakjuk fel!



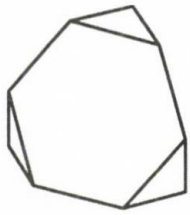
Most válik láthatóvá, hogy miért nem folytatódott a számsorozat az eddigi szabály szerint. A (7; 1; 1), az (1; 7; 1) és az (1; 1; 7) pontokhoz tartozó kockák hiányoznak!

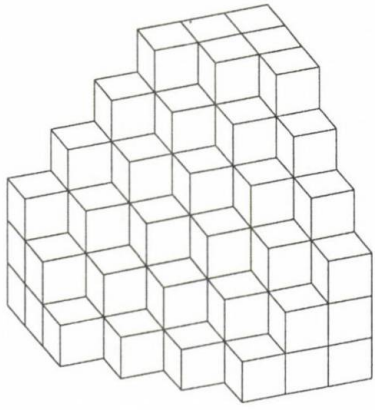
Az összes kocka feléig folytassuk az építkezést!

Itt érdemes megállni. Tanítványaim elkészítették azt a testet, melyet egy kocka két egybevágó részre bontásával kapunk úgy, hogy a síkmetszet szabályos hatszög. Ezt előzetesen a kocka megfelelő hálózatán így szoktam szemléltetni:



Érdemes egyszerre szemügyre venni a kétféle módon felezett félkockát!





Ezt követően a térkoordináták egyidejű elmondásával fejezzük be a $6 \times 6 \times 6$-os kocka összeépítését!

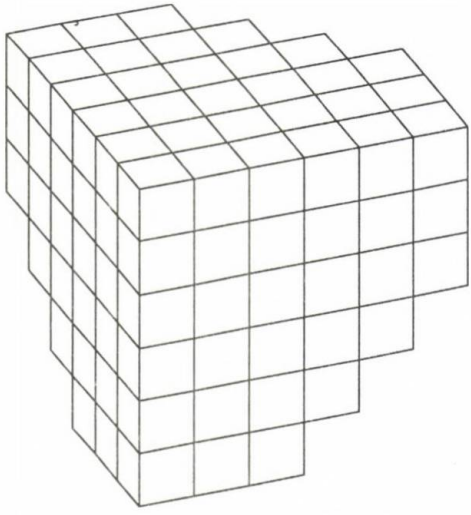
Megéri tovább építkezni úgy, hogy az egész kockát lépésről-lépésre félkockáig bontjuk, és a lebontott részből pedig az előzőekben leírt módon félkockát építünk. Az így kettéosztott kocka látványos és szép.

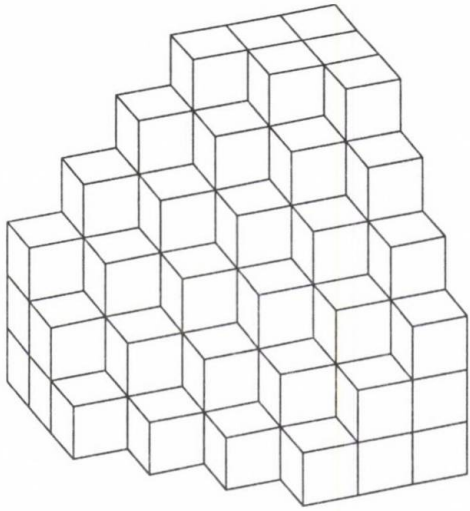
Nyolcosztályos gimnáziumban tanítok, így tudom, hogy a 11-14 éves diákokkal együtt a valószínűség-számítás főbb gondolatai játékos módon előkészíthetők, kialakíthatók. Ennek elmaradása később igen nehezen pótolható, mert a nagydiák nehezen vehető rá a sok kísérlet otthoni elvégzésére. Néhány éve a Tanítóképző Főiskolán is volt alkalmam tanítani ezt a problémakört. Nem egy olyan hallgató volt a csoportomban, aki leérettségizett, és semmit sem hallott a valószínűségről, és egyetlen kísérletsorozatot sem végzett! A pénz- és a kockadobásokat gyakorlati órán kellett elvégeztetni. A felnőtt fiatalok ekkor élték át azt, amit mai kis tanítványaim. Jó volt látni, hogy nekik is élmény volt az előzőekben leírt módon feldolgozott program.

A valószínűségi feladatok térbeli szemléltetéséhez kapcsolódóan feltehetünk még néhány kérdést. Ezek megoldásával újabb szép gondolatokhoz juthatunk:

Igaz-e, hogy a kettőnél nagyobb pozitív egész számok bármelyikét három pozitív egész összegére bontva a lehetséges bontások száma mindig háromszögszám?

Egy kockából indulva és azt a következő háromszögszámmal bővítve és a látott módon testté építve kérdezhetjük, hogy hány lapja, éle és csúcsa van ennek a testnek? No, és mennyi a felszíne egy konkrét esetben? Mennyi a felszín akkor, ha az n. háromszögszámnak megfelelő kockákat is beépítettük a testbe?





Ambrus Gabriella

„Nyitott" és „nyitható" feladatok a tanárképzésben és a matematikaoktatásban

A fogalmak értelmezése

Nyitott feladatról vagy problémáról többféle értelemben is beszélhetünk. Silver, E.A. [1] négyféle esetet sorolt például fel, amelyeknél ezt az elnevezést használhatjuk:

1. A megoldatlan problémák esetében. Olyan értelemben, hogy még meg nem oldott, tehát nyitott kérdésről van szó.
   Ilyen volt például Fermat tétele is egészen 1993-ig.
2. Olyan problémáknál, amelyeknél a választ a feladat értelmezése dönti el. Gondoljunk például az olyan kombinatorikai feladatokra, amelyeknél számkártyákból készítünk bizonyos tulajdonságoknak megfelelő számokat, és a megoldás változik aszerint, hogy egy-egy kártyafajtából hány darabot lehet felhasználni.
3. Olyan feladatoknál, amelyek esetében több különböző módszer is adódik a megoldásra, ill. amelyeknél éppen ezek megkeresése a lényeges. Egyszerű, ismert példa erre:
   Egy udvarban nyulak és tyúkok vannak, 120 lábuk és 50 fejük van. Hány nyúl és hány tyúk van az udvarban.
4. Olyan feladatok, amelyek sugallják a további kérdéseket, ill. általánosításokat. Erre a későbbiekben részletesebben bemutatok majd egy ún. táblázat-kitöltéses példát.

A matematikatanításban nyitott feladatnak, ill. problémának az utóbbi hármat szoktuk nevezni.

Ezekből a példákból is látszik, hogy nem teljesen új fogalomról van szó; inkább arról, hogy nem neveztük meg, vagy nem így szoktuk nevezni az idesorolható feladatokat. A megnevezés, a kategóriába sorolás azonban itt is, mint annyi más esetben jóval több, mint egyszerű címkeragasztás: a tartalom is átgondolásra kerül.

De térjünk vissza a nyitott feladat fogalmához! Az előbbiekkel összhangban van az a meghatározás, amelynél éppen a fogalom ellentettjét, a zárt feladatot hívjuk segítségül.

A *zárt feladat* esetében bizonyos megadott kezdeti feltételek mellett keressük pontosan meghatározott kérdésre a választ. A feladatok többsége ilyen. *Ha egy feladat nem zárt, akkor nyitott.*

Ennek alapján besorolás is lehetséges a *nyitott feladatok* esetében. Azaz a kezdeti, ill. végállapot „nyitottsága" alapján különböző típusokról beszélünk:

1. Nyitott végű feladatok

Található-e olyan a, b különböző természetes szám, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$?

Hasonló kérdés a, b, c esetében: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Folytassuk!

A feladat megoldása nem túl nehéz, és arra az érdekes állításra vezet, hogy három tagtól kezdve mindig lesz az 1-nek a kívánt feltételnek eleget tevő összegre bontása.

2. Nyitott kezdetű feladatok

A kezdeti feltételeket változtatjuk. Osszuk fel az óra számlapját úgy, hogy az egyes részekben szereplő számok összege 15 legyen!

Ha itt nem adjuk meg, hogy milyen óraszámlapra gondolunk, érdekes megoldások egész sora keletkezhet, ehhez a „hagyományos" számlapon is szép feladathoz.

3. Nyitott kezdetű és végű feladatok

Ún. szituációs problémák.

Bizonyos információk birtokában kell feladato(ka)t megfogalmazni. Ilyen szituáció lehet akár egy rövid újságcikk is.

De nem csak az. Akár egy tétel és egy folyóiratcikk is alkalmas erre, mint például annál a hatszögtáblás-lefedéses feladatnál, melyről a MATA 1994/4-ban írtam. A későbbiekben erre a feladatra még visszatérek.

Az eddigiekből adódik, hogy mi lehet a következő, címben szereplő fogalom, a „nyitható feladat" tartalma. Olyan feladatról van szó, amely önmagában zárt, vagy esetleg már nyitott, de (tovább) nyitható, azaz más értelmezéssel, adatok változtatásával, továbbkérdezéssel stb. bővíthető. Elvben minden feladat nyitható, vannak azonban olyanok, amelyeknél ez különösen könnyen megy. Például az előbb említett lefedési feladat, vagy számelmélet problémák esetében.

Ki „nyithat" feladatot? Tanár is, diák is, de talán külön értéke van, ha ezt diák teszi. Erre még visszatérünk.

Az eddigiekben a *feladat és probléma* szót felváltva használtam, mintegy szinonimaként. Ez a szóhasználat is gyakori. Manapság inkább a „probléma" megnevezés a divatos, mert úgy érezzük, az már rangot ad a feladatnak, ha így nevezzük.

Valójában a szakirodalomban a „probléma" és a „feladat" fogalmak, legalábbis „hivatalosan" elválasztásra kerülnek. Míg azonban a „probléma" (külön) jól meghatározható, a „feladat" értelmezése esetén eltérő nézetek vannak.

Ezekre a meggondolásokra azért térek ki, mert a „nyitott probléma" és (ritkábban) a „nyitott feladat" kifejezés (is) is előfordul, így érdemes néhány szót ejteni a két fogalom összefüggéseiről.

Mi a probléma?

Olyan erőpróba, amelynek megoldása során valamely kezdeti állapotból, valamely végállapotba szeretnénk eljutni , ez azonban bizonyos akadályba ütközik, ugyanis az eljutás módja nem adott közvetlenül.

Ha **i** jelöli a továbbiakban az „ismert" szót, **n** pedig értelemszerűen a „nem ismert" kifejezést, az előbbi meghatározást figyelembe véve a következő ábra készíthető (vö.:Blum/Wiegand, 1999)

K	—?→	V
i		i
i		n
n		i
n		n

Az utóbbi hármat szoktuk ezek közül nyitott problémának nevezni. Ezekre a korábbiakban már adtunk példát, a kezdeti és végállapot nyitottsága alapján történő besorolásnál, ugyanis ott ebben az értelemben „problémá"-k szerepeltek.

Mit jelent a „feladat"?

Az előbb említett szerzők és mások is, csak az ún. gyakorlófeladatokat sorolják ide. Azaz az olyanokat, ahol a kezdeti feltételekből a végállapotba ismert (de végigjárandó) út vezet. Az előbbi jelölések segítségével a következő ábra készíthető:

K	→	V
i		i
n		i
i		n
n		n

(Blum/Wiegandnál az utóbbi két eset nem tartozik ide.)

Nézzünk példát az első, az **i i** *esetre!* Itt a nyitottságot a több megoldási módszer keresése jelenti, például egyszerű arányossági feladatok esetében következtetéssel, ill. képlettel történő megoldást.

A második esethez, **n i**, *lehet példa a következő:* Adjunk meg öt olyan (elsőfokú) egyenletet, amelynek gyöke a 3!

A harmadik eset, **i n**, az említett szerzőknél talán azért került kizárásra, mert ismeretlen célt nemigen lehet ismert módszerrel elérni. De az ismeretlen befejezésnek más értelmet adva, én idesorolnám azokat egyszerű gyakorló feladatokat, amelyeknél az adatokból még közvetlenül megválaszolható további kérdéseket is fel

lehet tenni, és ez utóbbira utalás történik a feladat végén.

Ettől eltérő szerintem *a negyedik eset*, **n n**, ahol mind a kezdeti, mind a végállapot ismeretlen. Itt már a feladatot is meg kell tehát fogalmazni, így ez valóban inkább „probléma".

Érdemes megjegyezni, hogy nálunk a „feladat" inkább gyűjtőfogalom, egyszerű gyakorlatokat és problémákat is magában foglal.

Sajátos ezzel kapcsolatban Pólya György szóhasználata pl. a Gondolkodás Iskolája c. könyvében. Pólya végig „feladatok"-ról beszél, amelyeknek viszont szerinte olyannak kellene lenniük, hogy a gyerek számára kihívást, „problémá"-t jelentsenek. A „(gyakorló)feladat"-„probléma" kifejezések használata semmilyen megállapodással sem tehető azonban egyértelművé, hiszen ami valakinek probléma, az a másik ember számára már lehet csupán „rutinfeladat" is, és fordítva.

A továbbiakban a „feladat" szót gyűjtőfogalom értelemben fogom használni, a „probléma"-t pedig a megadott meghatározás szerint.

Bármilyen értelemben is használjuk azonban a két kifejezést, „nyitott probléma" vagy akár „nyitott feladat" emlegetése esetén se gondoljunk feltétlenül rendkívüli nehézségű „feladatokra", amint ez majd a későbbiekben sorra kerülő példákból is látható.

Történeti vonatkozások

Mint láttuk, „nyitott feladatok"-kal már korábban is dolgoztak, de csak azután kerültek behatóbb elemzésre, hogy a problémamegoldó gondolkodás a matematikatanításban hangsúlyosabbá vált.

Ez utóbbi időszak az 1960-as évektől számítható, amikor az előző évtized végén megjelenő „Új Matek" (New Math) irányzat hibái már kezdtek ismertté válni – ezek közül kiemelkedő a túlzott formalizmus, és részben ennek révén a műveletek oktatásának elhanyagolása.

Az „Új Matek" hibáinak hatására, főleg az Egyesült Államokban, ellenpólusként az ún. „Back to Basics" irányzat jelent meg, ami nevének megfelelően, „Vissza az alapokhoz", a legfőbb hangsúlyt az alapismeretek leginkább mechanikus tanítására helyezte.

A szélsőségek feloldására került előtérbe a „problémamegoldás", mint irányzat, amely a matematikai gondolkodás oktatását tűzte ki célul.

A „problémamegoldó" irányzaton belül is, akárcsak a „New Math"-n belül , további irányzatok, elképzelések különíthetők el, ezeknek a tárgyalására itt nincs lehetőség. Fontos azonban megemlíteni, hogy a problémaorientált matematikaoktatás módszereit országonként kidolgozták, és azóta is fejlesztik. Nálunk ezeknek a kutatásoknak a kezdetei Varga Tamás nevéhez fűződnek, az 1960-as évek közepétől, a „Komplex Matematikatanítási Kísérlet" keretében. Varga Tamás matematikatanítási koncepcióját „Post-New Math" néven is emlegette több cikkében.

A „nyitott problémák" tanulmányozása az 1970-es évektől került előtérbe, [3],ekkor dolgozták ki Japánban az ilyen típusú feladatokon alapuló tanítási módszert is.

Mint már említettem, a „zárt feladatok" elvben mind nyithatók, vannak azonban olyanok, amelyeknél ez nemcsak elég könnyen adódik, hanem érdekes eredményekre is vezet. A továbbiakban különböző szempontokból érdekes „feladatnyitások" következnek.

Feladatok „nyitása"

1. feladat

Egy 13×31-es táblázat minden mezőjébe számokat írunk be úgy, hogy a számok összege bármelyik sorban és bármelyik oszlopban ugyanaz a szám. Melyik lehet ez a szám?
(Varga Tamás Matematikaverseny, 1993/94-es döntő, 7. osztály)

Megoldás: Ha a 13 oszlopba írt számok oszloponkénti összege ugyanaz a szám, jelölje ezt x, akkor e 13 azonos számnak az összege, vagyis a mezőkbe írt számok összege a 13-nak valamely számszorosa. A 31 sorba írtak összege soronként ugyanaz a szám, így ez 31 többszöröseként ugyancsak a mezőkbe írt számok összegét állítja elő. Ennek alapján a következő egyenlőség írható fel: $13x = 31x$.

Ebből pedig következik, hogy egyenlőség csak az $x = 0$ esetben állhat fenn.

A megoldás során azonban hiányérzetünk támad, szinte azonnal adódik is a kérdés:

1. kérdés

Kitölthető-e egyáltalán az adott módon a táblázat?

– Természetesen igen, hiszen ha minden helyre 0-t írunk, a feladatnak megfelelő kitöltést kaptunk. (Kitöltésen a továbbiakban a feladat feltételeinek megfelelő kitöltést értjük.)

2. kérdés

Kitölthető-e úgy, hogy nem csupa 0 szerepel benne?

– Igen, például ha a táblázat egy 2×2-es részébe az a, $-a$, $a \neq 0$ számokat írjuk felváltva, a többi helyre pedig 0-t.

3. kérdés

Van-e olyan kitöltés, amelyben nem szerepel 0?

– Igen, ennek a kérdésnek a megválaszolása már hosszabb, megtalálható a [5]-ben, de nem is túl nehéz.

4. kérdés

Van-e olyan kitöltés, amelyben csupa különböző (egész) szám szerepel?

– Igen, több módszer is lehetséges (ld. [5]), itt most csak egyet idézünk röviden. A feltételeknek megfelel az a kitöltés például, melyben az első sorba 1-12-ig írjuk a számokat, az utolsó helyre ezek összegének ellentettjét, majd folytatjuk az eljárást a 30. sorig hasonlóan. A 31. sorban az egyes oszlopokban szereplő számok összegének az ellentettje kerül.
Az így kitöltött táblázat (vázlatosan):

1	2	3	...	12	–78
13	14	15	...	24	–222
⋮					
349	350	351	...	360	–4254
–5250	–5280	–5310	...	–5580	64980

Ebből látható az is, hogy ilyen módon végtelen sokféle kitöltés is létezik, hiszen a kitöltést pl. bármely természetes számtól indíthatjuk.

5. kérdés

Kitölthető-e bármely $n \times m$-es táblázat különböző (egész) számokkal?

– Igen, az előbbi módszer erre is alkalmas, de ha esetleg ismétlődő számjegy lép fel a kitöltés során, az kijavítható (ld. [5])

Megjegyzendő, hogyha $n = m$, akkor természetesen az $mx = nx$ egyenlőségből $mx = mx$ lesz, azaz x tetszőleges .

Ennek alapján természetesen még további kérdések tehetők fel.

2. feladat

Igazoljuk, hogy bármely 1-nél nagyobb pozitív egész szám bármely 1-nél nagyobb pozitív egész kitevőjű hatványának kettes számrendszerbeli alakja tartalmazza a 0 számjegyet!
(Varga Tamás Matematikaverseny 1991/92 döntő, 7. osztály)

A feladatot könnyen át lehet fogalmazni a következőképpen:

Bizonyítsuk be, hogy a $2^k = a^n + 1$ egyenlőség, (n, a, $k > 1$ természetes számok), nem teljesülhet!

Megoldás: (vázlat)

Válasszuk szét az n páros, n páratlan eseteket, az első esetben alkalmazzuk a binomiálistételt, a második esetben pedig a következő azonosságot:

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - \ldots - a + 1).$$

A feladat megoldásának kidolgozását az olvasóra bízzuk.

Az átfogalmazott alakból azonban könnyen adódnak további kérdések:

1. kérdés

Megoldhatatlan-e általában a következő egyenlet: $b^k = a^n + 1$; a, k, n, $b > 1$ természetes számok esetén?

– Nem, megoldás például a következő: $3^2 = 2^3 + 1$

2. kérdés

Van-e más megoldás?

– Ebben az esetben csak az a sejtés adódott, hogy nincs más megoldás a már említetten kívül, és ezt csak speciális esetekre sikerült igazolni.

A sikertelenség azonban talán nem véletlen, mert mint utóbb kiderült, itt tulajdonképpen a nevezetes *Catalan sejtés*-t szerettük volna megoldani, amit 1844-ben fogalmaztak meg. Többszöri próbálkozás, részeredmények után csak mintegy húsz évvel ezelőtt készült el először a bizonyítása.

3. feladat

Bizonyítsuk be:

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\in\mathbb{N} \quad n\in\mathbb{N}!$$

Megoldás:

1. A kifejezés felírható a következő szorzatalakban:

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

innen következik, hogy $2 \mid n(n+1)$, így csak az $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$ eseteket kell megvizsgálni.

2. Vegyük észre, hogy a szorzatalakban az első n négyzetszám összege áll, ez pedig minden n-re természetes szám.
A feltételek közül tartsuk meg a 3 kitevőnek azt a tulajdonságát, hogy páratlan prímszám, és így általánosítsuk a feladatot!

1. kérdés:

Igaz-e, hogy

$$\frac{n^p}{p}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2p}\in\mathbb{N},$$

ha p páratlan prímszám, $n \in \mathbb{N}$?

– A kifejezést a következő alakban írhatjuk föl:

$$\frac{2n^p+n^2p+n}{2p}=\frac{n(2n^{p-1}+np+1)}{2p},$$

$2 \mid n$, vagy $2 \mid np+1$ teljesül. Így, ha $p \mid n$ is igaz, készen vagyunk. Ha azonban p nem osztója n-nek, akkor, mivel $p \mid np$ mindig igaz, csak akkor osztható a kifejezés p-vel, ha a $2n^{p-1}+1$ is osztható p-vel. Ahhoz, hogy a (kis) Fermat-tételt ($a^{p-1} \equiv 1$ (p), $(a, p) = 1$) alkalmazhassuk, alakítsuk át ez utóbbi kifejezést a következőképpen:

$$2n^{p-1}+1=2(n^{p-1}-1)+3$$

Így az említett p értékekre, $p \mid 2(n^{p-1}-1)$, viszont a teljes kifejezésre $p \mid 2(n^{p-1}-1)+3$ csak $p = 3$ esetén teljesül.

Összefoglalva: Ha p osztója n-nek, akkor az eredeti kifejezés mindig természetes számot ad, ha azonban p nem osztója n-nek, akkor csak $p = 3$ esetén lesz a kifejezés természetes szám.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyha a 2-es kitevő helyett is páratlan prímszámot írunk, milyen feltétel mellett lesz kifejezésünk természetes szám.

2. kérdés

Milyen feltételek mellett igaz, hogy:

$$\frac{n^p}{p}+\frac{n^q}{q}+\frac{n}{pq}\in\mathbb{N}, \quad n\in\mathbb{N},$$

p, q páratlan prímszámok?

– A feladat az előbbi módon megoldható, nem részletezzük.

4. feladat

Szituációs probléma:

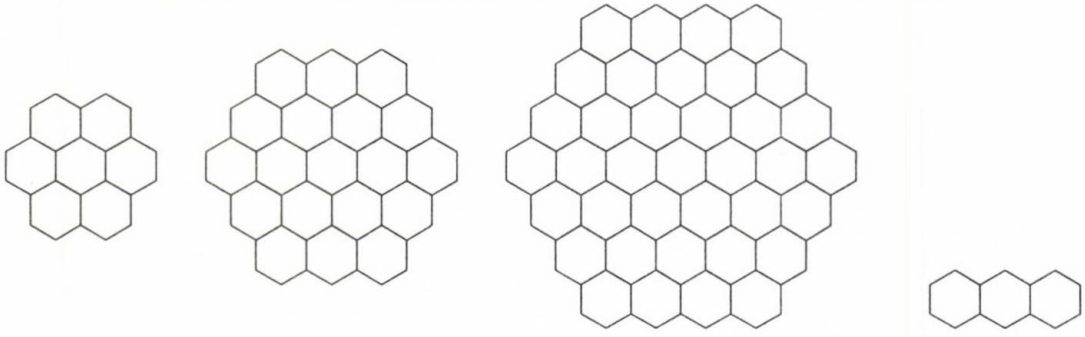
Adott egy tétel és egy cikk a hatszögtáblákkal kapcsolatban. A tétel:

Egy $a \times b$ téglalap pontosan akkor fedhető le (egyrétegűen, hézagmentesen) $1 \times n$-es lécekkel, ha n osztója a-nak vagy b-nek. (Klarner) [9]

A cikk:

Tóth S.: Feladatok hatszögtáblán MATA 1993/1

A cikk nem vizsgálta az említett tételhez hasonló lefedéseket a hatszögtábla esetében.



hatszögtáblák

1. ábra

1. kérdés

Lefedhető-e egy m-tábla ($m > 2$) $1 \times n$-es lécekkel ($n > 1$)? (Ld. 1. ábra)

– Nem, semmilyen esetben sem. A bizonyítás hosszadalmas, megtalálható a [6]-ban.

2. kérdés

Egy mező (kis hatszög) eltávolítása esetén (kilyukasztjuk a táblát) lefedhető lesz-e, és milyen esetekben az előbbi feltételek mellett az m-tábla?

– Vannak lefedhető esetek, de legfeljebb akkor, ha $m = nq$ vagy $m = nq + 1$. Ezekben az esetekben pontosan megadható, hogy melyik mező eltávolítása esetén fedhető le a tábla a megfelelő lécekkel. [7]

3. kérdés

Van-e olyan m-tábla, amely lefedhető különböző hosszúságú lécekkel?

– Ilyen tábla nem létezik. [7]

Ezek a feladatok többféle oldalról mutatták be a nyitás lehetőségét, a következőkben általános iskolai tankönyvi feladatok felhasználásával mutatok be példákat „nyitott feladatokra", ill. feladatok „nyitására". Ehhez Hajdú S.: Matematika 7. (emelt szint) tankönyvét használtam.

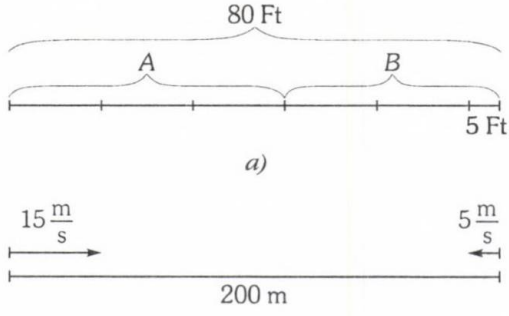
Tankönyvi példák „nyitott feladatok"-ra (7.o.)

1. Vond össze: $7 - 6 + 5 - 4 + 3$.

Az adott műveletsorban helyezz el különbözőképpen zárójeleket, és számold ki úgy is az eredményt!

Mely zárójelezésekkel változik meg az eredmény? (34.o. 1.55.)

2. Fogalmazzunk meg szöveget az ábrákhoz! Írjuk fel az adatok közti összefüggést egyenlettel, egyenlőtlenséggel! (2. ábra) (69.o. 1.107.)



2. ábra

3. Rajzolj egy háromszöget! Szerkessz többféleképpen kétszer akkora területű háromszöget! Melyik adatot változtattad meg? (94.o. 2.47. *a)*)

4. Foglald táblázatba a hasábok jellemző adatait! (3. ábra)

Írj föl a csúcsok száma (C), az élek száma (É) és a lapok száma (L) között (minden hasábra érvényes) összefüggést! (109.0. 2.81.)

5. Írd föl kétféle alakban az ábrán látható téglalapok területét! (4. ábra) (278.0. 8.39.)

Tankönyvi feladatok „nyitása"

1. Határozd meg a műveletsorok eredményét! Vizsgáld meg, lehet-e egyszerűsíteni!

a) $\frac{14}{15}+\frac{21}{30}-\frac{15}{10}$

b) $\frac{13}{12}-\frac{35}{24}+\frac{14}{28}$

(30.o. 1.43. *a)*, *b)*)

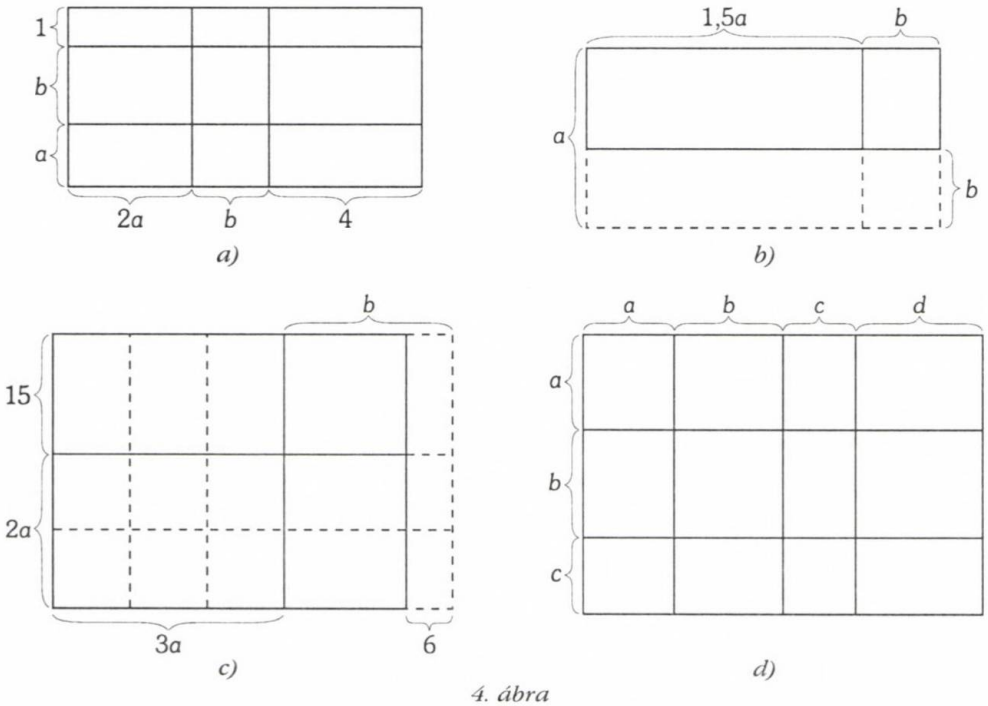
Kérdés:

Hogyan alakul a műveletek eredménye zárójelek elhelyezésével? Hogyan zárójelezzünk, hogy a lehető legnagyobb, és hogyan, hogy a lehető legkisebb eredményt kaphassuk? (Ez utóbbi kérdés hosszabb műveletsor esetén érdekes igazán.)

2. Andor 1,80 km-re lakik az iskolától, 950 m-rel nagyobb távolságra, mint Béla. Milyen távolságra lakik az iskolától Béla? (34.o. 1.54.*b)*)

Az alaplapja	Háromszög	Négyszög	Ötszög	Hatszög	Húszszög	*n*-szög
Csúcsainak száma						
Éleinek száma						
Lapjainak száma						

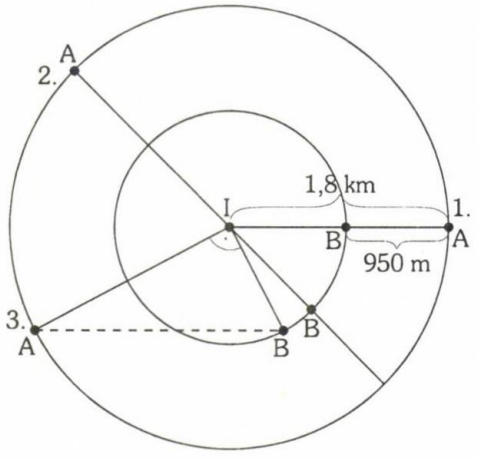
3. ábra



4. ábra

Kérdés:

Milyen távol laknak egymástól a fiúk (5. ábra)?



1. eset: 0,95 km 2. eset: 0,85 km + 1,80 km
3. eset: $\sqrt{1{,}8^2 + 0{,}85^2}$ km ...

5. ábra

3. Ferkó kirándulni ment, 1 óra alatt átlagosan 4,5 km-t tudott megtenni. Hány kilométert gyalogolt 3,5 óra alatt.

Hazafelé óránként 0,3 km-rel kevesebb utat tett meg. Mennyi idő alatt ért haza? (38.o. 1.67. *f)*)

Kérdés:

Az út végén már nagyon fáradt volt, így a hazafelé tartó út második órája és minden további egész legyalogolt óra után még 10 percet pihent is. Mikor ért haza?

4. Két gyerek az életkoruk arányában osztotta meg a munkát. Imre 12 éves, és 180 m^2 kertet gyomlált ki. Jancsi 15 éves. Hány négyzetméter kertet gyomláltak ki ketten? (44.o. 1.77. *f)*)

1. kérdés:

Hány négyzetméter kertet fognak jövőre kigyomlálni?

– Itt természetesen meg kell gondolni, hogy az éveik arányában ugyanolyan marad-e a teljesítményük, mint előző évben, azaz növekszik-e 1-1 évnyi mennyiséggel a kigyomlált terület, vagy ugyanakkora kertet kell más arányban felosztani egymás között az éveik számának arányában.

2. kérdés:

Mi lenne a válasz mondjuk 5, 10, 20, 50 év múlva?

– Mindkét előbbi számításmód esetében érdekes megnézni és értékelni a kapott eredményeket.

5. 1,2 m magas, 45 m hosszú kerítés befestéséhez elegendő a festékem. Milyen hosszan festhetek be ezzel a festékmennyiséggel egy 1,5 m magas kerítést; 0,8 m magas a kerítést? (50.o. 1.84. *e)*)

1. kérdés:

Az adott mennyiségű festékkel befesthetek-e egy 1,2 m magas, 53,5 m hosszú kerítést, ha a festékemet ezen a felületen hígítva is használhatom; festék : hígító aránya 5 : 1?

2. kérdés:

Milyen hosszan festhetek be egy 1,5 m magas kerítést, ha egy kb. 3 m × 0,5 m-es darabon hibás a fal, így azt kétszer kell lefestenem?

„Nyitott feladatok" és a számítógép

A hagyományos papír, ceruza mellett segítségünkre lehet „nyitott" típusú feladatoknál a számítógép is. Akár olyan formában, hogy valamely részkérdés kidolgozásához, valamilyen sejtés megerősítéséhez használjuk, akár úgy is, hogy a számítógép alkalmazása révén adódnak újabb kérdések. Erre lehet példa az interaktív Cabri-geometria program alkalmazása feladatok megoldásában.

Mivel itt a rajzfelület dinamikusan kezelhető, egy-egy feladat kapcsán több megfigyelés is tehető, amely azután – a tanulók szintjének megfelelően – kerülhet bizonyításra.

Módszertani megjegyzések

A továbbiakban felsorolnék néhány érvet amellett, miért érdemes nyitott típusú feladatokkal foglalkozni. Ezek az érvek nem különállók, inkább úgy tekintendők, mint néhány fontos szempont a (matematika)oktatásban, amelyek érvényrejutását ennek a feladattípusnak az alkalmazása segítheti.

- A matematikai gondolkodást fejleszti, sejtések, kérdések megfogalmazásával bizonyításra, utánagondolásra ösztönöz.
- A matematika változásának, fejlődésének gondolatát is közvetíti, szemben a zárt feladatokkal való dolgozás révén kialakulható „statikus képpel" a matematikáról. – A gondolkodásfejlesztés pszichológiai alapjait tekintve jól közelíti azt a gondolati rendszert, amellyel Piaget lényegileg újat hozott az oktatás számára is. Nevezetesen annyiban, hogy az egyén érdeklődésére építve, annak aktív részvételével az adott szinten fejleszti tovább a meglevő kognitív struktúrákat .
- Motiváló hatású, hiszen megtöri a feladatok gyakran tapasztalható egyhangúságát, személyesebbé válik a kapcsolat a feladattal, hiszen annak alakításában a megoldó maga is részt vehet.
- Életközelibbé válhatnak a feladatok, s így egyre távolabb kerülhetünk attól a téves elgondolástól, amely az oktatás közvetlen (pl. tanár, diák) és közvetett (pl. szülők) résztvevőiben még ma is megfogalmazódik: A matek jórészt átlagember számára meg nem érthető szabályok gyűjteménye, amelyek életidegenek, és szinte kizárólag az iskolában használatosak.

A felsorolásban szándékosan nem „tanulókról" írtam, mert úgy érzem, ezek az érvek nemcsak az ő szempontjukból fontosak, hanem a matematikát tanító tanárok számára is gyakorlatilag ugyanazokkal az előnyökkel jár „nyitott feladatok" alkalmazása az órán, vagy iskolán kívüli foglalkozásokon.

Irodalom

[1] Silver E.A.: The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives, ZDM, 95/2

[2] Blum, W. – Wiegand, B.: Offene Probleme für den Mathematikunterricht-Kann man Schulbücher dafür nutzen?, Beiträge zum Mathematikunterricht , 1999, Franzbecker

[3] Pekhonen, E.: Introduction: Use of open-ended problems ZDM, 95/2

[4] Pogáts F.: Varga Tamás Matematikai Versenyek I. Typotex, 1995

[5] Ambrus G.: Kutassunk együtt! Módszertani Lapok 1995/2

[6] Ambrus G.: Lefedések hatszögtáblán A Matematika Tanítása 1994/4

[7] Ambrus G.. Újabb eredmények hatszögtáblán A Matematika Tanítása 1996/1

[8] Szerk.: Hajdú Sándor: Matematika 7., emelt szint Calibra

[9] Honsberger, R.: Mathematische Juwelen, Vieweg, Wiesbaden, 1982, 159-162.o.

Holló-Szabó Ferenc

1997 – 1999, ikerprímek

Ikerfiaimnak, Attilának és Ákosnak

Az évezred utolsó két páratlan évszámáról talán kevesen tudják, hogy mindketten prímszámok. Utoljára ilyesmi közel 50 éve, 1949–1951-ben fordult elő, s a következő 50 évben is csak egyszer lesz szerencsénk hasonló évszámokhoz, 2027–2029-ben. Az ilyen szomszédos páratlan számokat, amelyek mindegyike prímszám ikerprímeknek nevezzük. A számsor elején még viszonylag gyakran találkozunk velük (1. ábra), de már a prímszámok elhelyezkedése is annyira nehezen áttekinthető, hogy az ikerprímekkel kapcsolatos kutatásokról az egyetemi anyagban is kevés szó esik. Először ejtsünk néhány szót magukról az ikerprímekről.

2, 3-5, 5-7, 11-13, 17-19, 23, 29-31, 37, 41-43, 47, 53, 59-61, 67, 71-73, 79, 83, 89, 97, 101-103, 107-109, 113, ...

1. ábra
Ikerprímek a prímszámok sorozatában

Hármas ikrek is születtek, de már nagyon régen, i.sz. 3-5-7-ben. Mint könnyen látható a $p-2$, p, $p+2$ számok hárommal való osztási maradékai páronként különbözőek, így közülük legalább az egyik hárommal osztható. Ez azt jelenti, hogy a 3-5-7 kivételével, kettőnél több egymást követő páratlan szám mindegyike nem lehet prím.

Már Eukleidész korában (i.e. III.sz.) is ismert volt, hogy végtelen sok prímszám létezik. Euler (1707-1783) pedig már azt is tudta, hogy az n-nél kisebb prímszámok reciprokösszege aszimptotikusan egyenlő $\log[\log n]$-nel, tehát tetszőlegesen nagy lehet. Így a prímszámok bizonyos értelemben pl. a négyzetszámokhoz képest „elég sűrűn" helyezkednek el a természetes számok sorozatában. Bár a négyzetszámok is végtelen sokan vannak, de azok reciprokainak összege tetszőleges korlátnál már nem lehet nagyobb (< 2).

Az ikerprímeket vizsgálva sikerült ugyan megmutatni, hogy azok reciprokösszege is egy bizonyos korlát alatt marad, tehát az ikerprímek – a fenti értelemben – még a prímszámok sorozatában is ritkásan helyezkednek el, de ha az ikerprímek halmazának számosságáról többet akarunk megtudni, akkor nagyon nagy fába vágjuk a fejszénket. Máig megoldatlan a számelmélet egyik leghíresebb problémája, az ún. ikerprím-sejtés, azaz hogy létezik-e végtelen sok ikerprím? Azt sejtjük, hogy végtelen sok van belőlük, de még elképzelésünk sincs arról, hogy hogyan lehetne a bizonyítás közelébe férkőzni.

A sejtés, hogy végtelen sok ikerprím létezik megalapozottnak látszik, hiszen eddig akármilyen nagy számok között vizsgálódtak is, előbb-utóbb találtak ilyen prímpárokat, például: 30011-30013 és 1 000 000 007 – 1 000 000 009. Kraitchik pl. meghatározta az egybillió tízezer sugarú környezetében a prímszámokat, és itt is talált ikerprímeket.

Ha a prímszámok sorozatát tekintjük, akkor látjuk, hogy léteznek ún. ikerprím-párok, ikerprím-hármasok, sőt ikerprím-négyesek is. Ekkor pontosan 2, 3, illetve 4 ikerprím a prímszámok sorozatában úgy követi egymást, hogy közöttük nincs más prímszám. Táblázatba foglaltuk (2. ábra) ezek előfordulásait, pl. tízezerig öt darab ikerprím-hármas és egyetlen ikerprím-négyes található:

(5-7, 11-13, 17-19)
(179-181, 191-193, 197-199)
(3359-3361, 3371-3373, 3389-3391)
(4217-4219, 4229-4231, 4241-4243)
(6761-6763, 6779-6781, 6791-6793)
(9419-9421, 9431-9433, 9437-9439, 9461-9463)

Felső határ	Ikerprímek száma	Párok száma	Hármasok száma	Négyesek száma	...
10	2	0	0	0	...
100	8	0	1	0	...
1000	33	4	2	0	...
10000	222	21	5	1	...
...	...	...	...	...	...

2. ábra
Az egyes ikerprím n-esek előfordulásainak száma

A továbbiakban egy olyan, az ikerprímekkel kapcsolatos kérdéskört szeretnék bemutatni, amelyben a prímszámok sorozatától szokatlan módon bizonyos szabályosságokat lehet felfedezni, a számítógép használata nélkül is kutatható néhány ezres számkörben. Legyen mondjuk tízezerig adva a prímszámok sorozata úgy, hogy mindez elférjen egy papírlapon!
Kísérletezzünk a prímszámokkal!

A számelmélet igen behatóan foglalkozik a prímszámok bizonyos speciális sorozatokhoz való viszonyával. Dirichlet ((1805-1859) neves német matematikus) egy híres tétele pl. azt mondja ki, hogy az $(ak + b)$ számtani sorozatban (ahol a, $b \in \mathbb{N}$ rögzített, és k végigfut a természetes számokon) pontosan akkor van végtelen sok prímszám, ha az a és b paraméterek relatív prímek.

Ezen felbuzdulva gondolhatunk arra, hogy másodrendű számtani sorozatok prím elemeit vizsgáljuk. A másodrendű számtani sorozatban a szomszédos elemek különbségei alkotnak számtani sorozatot, melynek differenciáját nevezzük a másodrendű számtani sorozat differenciájának.

Kísérlet: Induljunk ki valamelyik ikerprímből, és figyeljük meg, hogy a sorozat szomszédos elemeinek különbségét melyik számtani sorozat szerint érdemes változtatni ahhoz, hogy a kapott sorozat első néhány eleme prímszám lehessen.
Kísérleti eredmények:

Ikerprímek	3-5	5-7	11-13	17-19	29-31	41-43
Differencia	2	2	2	2	4	2

3-5, $9 = 3^2$;

5-7, 11, 17, $25 = 5^2$;

11-13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101, $121 = 11^2$;

17-19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257, $289 = 17^2$;

29-31, 37, 47, 61, 79, 101, 127, 157, 191, 229, 271, 317, 367, 421, 479, 541, 607, 677, 751, 829, 911, 997, 1087, 1181, 1279, 1381, 1487, 1597, $1711 = 29 \cdot 59$;

41-43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601, $1681 = 41^2$.

3. ábra
Néhány ikerprímekből induló, másodrendű számtani sorozat prím elemei

Az első 6 darab $(p, p + 2)$ ikerprím esetén azt tapasztaljuk, hogy már d = 2-re, ill. a 29-31 esetén d = 4-re is $(p - 1)$ darab prímszámmal kezdődik a másodrendű számtani sorozat. A sorozatban szereplő első összetett szám pedig osztható a sorozat kiinduló elemével, sőt $d = 2$ esetén ez a szám éppen a sorozat első elemének négyzete.

A 29-31 ikerprímből kiindulva, a kettes differenciával ugyan még nem kapjuk meg a szükséges prímeket, de ha a d értékét négynek választjuk, akkor az első összetett számhoz (az $1711 = 29 \cdot 59$-et) itt is csak a sorozat 29 darab prím eleme után jutunk.

Érdemes megjegyezni, hogy a 1711 a fent leírt sorozatokban található összetett számokhoz hasonlóan „alig összetett", vagyis csupán

két prímszám szorzata. Tapasztalataim szerint általában is elmondható az ikerprímekből induló másodrendű számtani sorozatok elemeiről, hogy prímek vagy alig összetettek, de legalábbis kevésbé azok, mint ahogy az a természetes számokról általában elmondható. Még nagyon sok érdekes észrevételt tehetünk, ha tovább haladunk ezen az úton.

De végezetül térjünk vissza az 1997-1999 számpárhoz! Készítsük el belőle pl. a $d = 2$-höz tartozó másodrendű számtani sorozatot (4. ábra)!

1997-1999, 2003, 2009, 2017, 2027, 2039, 2053, 2069, 2087, 2107, 2129, 2153, 2179, 2207, 2237, 2269, 2303, 2339, 2377, 2417, 2459, 2503, 2549, 2597, 2647, 2699, 2753, 2809, 2867, 2927, 2989, 3053, 3119, 3187, 3257, 3329, 3403, 3479, 3557, 3637, 3719, 3803, 3889, 3977, 4067, 4159, 4253, 4349, 4447, 4547, 4649, 4753, 4859, 4967, 5077, 5189, 5303, 5419, 5537, 5657, 5779, 5903, 6029, 6157, 6287, 6419, 6553, 6689, 6827, 6967, 7109, 7253, 7399, 7547, 7697, 7849, 8003, 8159, 8317, 8477, 8639, 8803, 8969, 9137, 9307, 9479, 9653, 9829, ...

4. ábra
Az (1997-1999, $d = 2$) sorozat prím és nem prím elemei tízezerig

A sorozat (1997-1999, $d = 2$) negyedik eleme ($2009 = 72 \cdot 41$) összetett szám, s így egyelőre az, hogy a sorozat 1997 db prím elemmel kezdődjön, hiú remény. Mégis érdemes a sorozatot folytatni, mert a sorozat nem prím elemeinek prímtényezős felbontásai egy, a fent említett, 41-43 számpárhoz tartozó sorozattal való igen érdekes kapcsolatra mutatnak rá (5. ábra).

$2009 = 7^2 \cdot 41$, $2107 = 7^2 \cdot 43$, $2303 = 7^2 \cdot 47$,
$2597 = 7^2 \cdot 53$, $2809 = 53^2$, $2867 = 47 \cdot 61$,
$2989 = 7^2 \cdot 61$, $3053 = 43 \cdot 71$, $3403 = 41 \cdot 83$,
$3479 = 7^2 \cdot 71$, $3977 = 41 \cdot 97$, $4067 = 7^2 \cdot 83$,
$4753 = 7^2 \cdot 97$, $4859 = 43 \cdot 113$, $5537 = 7^2 \cdot 113$,
$6157 = 47 \cdot 131$, $6419 = 7^2 \cdot 131$, $7399 = 7^2 \cdot 151$,
$7697 = 43 \cdot 179$, $7849 = 47 \cdot 167$, $8003 = 53 \cdot 151$,
$8159 = 41 \cdot 199$, $8477 = 7^2 \cdot 173$, $8639 = 53 \cdot 163$,
$9307 = 41 \cdot 227$, $9653 = 7^2 \cdot 197$, ...

41-43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, ...

5. ábra
Az (1997-1999, $d = 2$) sorozat nem prím elemei alig összetett számok

Az összetett elemek mindegyikéről elmondható, hogy néhány prímszám szorzataként állnak elő. Sőt feltűnően sok 7^2-val osztható szám van közöttük. Szerepel a 7^2-nak a 41, 43, 47, ... szerese, ami éppen a (41-43, $d = 2$) sorozat első néhány eleme (3. és 5. ábra). Az (1997-1999, $d = 2$)-be mintegy bele van ágyazva az egyik rokon sorozat a (41-43, $d = 2$). Az ily módon elő nem állítható összetett elemekről pedig elmondható (legalább is 10000-ig, ameddig kézi erővel vizsgálódhattam), hogy két prímszám szorzataként állnak elő!

1997-1999, 2003, **2009,** 2017, 2027, 2039, 2053, 2069, 2087, **2107,** 2129, 2153, 2179, 2207, 2237, 2269, **2303,** 2339, 2377, 2417, 2459, 2503, 2549, **2597,** 2647, 2699, 2753, 2809, 2867, 2927, **2989,** 3053, 3119, 3187, 3257, 3329, 3403, **3479,** 3557, 3637, 3719, 3803, 3889, 3977, **4067,** 4159, 4253, 4349, 4447, 4547, 4649, **4753,** 4859, 4967, 5077, 5189, 5303, 5419, **5537,** 5657, 5779, 5903, 6029, 6157, 6287, **6419,** 6553, 6689, 5827, 6967, 7109, 7256, **7399,** 7547, 7697, 7849, 8003, 8159, 8317, **8477,** 8639, 8803, 8969, 9137, 9307, 9479, **9653,** 9829, ...

6. ábra
Az (1997-1999, $d = 2$) sorozat 49-cel osztható elemei periodikusan helyezkednek el

Másrészt azt is érdemes észrevenni, hogy a (41-43, $d = 2$) sorozat elemei egyenletesen oszlanak el a (1997-1999, $d = 2$) sorozat elemei között (6. ábra), mégpedig a negyedik elemtől kezdve, éppen minden hetedik elem prímtényezői közt bukkannak fel...

Egyelőre ezt az egyetlen sorozatpárt találtam a fenti beágyazási tulajdonsággal. Nehéz kérdésnek látszik, hogy pontosan mikor találkozhatunk hasonló szerkezetekkel.

A következő ikerprím években 2027-2029-ben talán már többet is mondhatunk az ikerprím sejtésről és a fent nyitva hagyott kérdésekről, de az is lehet, hogy a következő évezred sem lesz elegendő ezek teljes tisztázásához.

Laczkó László

Egy felvételi feladat, és ami ennek kapcsán egy tanárnak eszébe juthat

A következő feladat 1993-ban a budapesti speciális matematika tagozatos iskolák felvételijén szerepelt. Adottak az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{13}$ és a $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{13}$ egész számok. Igazoljuk, hogy létezik olyan i, j és k – egymástól különböző és az $1 \le i \le 13$, $1 \le j \le 13$, $1 \le k \le 13$ feltételeknek eleget tevő – egész szám, hogy az

$$\frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k) \quad \text{és} \quad \frac{1}{3}(b_i + b_j + b_k)$$

számok egészek!

A tapasztaltak alapján ennek a korosztálynak szerencsésebb például a következő megfogalmazásban feladni a feladatot. Adott egy fiókos szekrény, és ebben két egymás alatti sorban 13-13 fiók. Mindegyik fiókba egy-egy egész számot teszünk, bizonyítsuk be, hogy ki lehet húzni 3-3 egymás alatti fiókot úgy, hogy az egy-egy sorban levő számok összege osztható hárommal!

A feladat megoldásához az a segédfeladat szükséges, hogy öt egész szám között mindig létezik három, hogy az összegük osztható hárommal. A skatulyaelvből következik, hogy az a_i-k között létezik legalább öt darab, hogy a hárommal való osztási maradékuk ugyanaz. Az ezekhez tartozó b_i-k közül lehet kiválasztani az i, j és k számokat.

Először nézzük a feladat egy általánosítását! Ha az a_i és b_i számokhoz hozzávesszük a c_i számokat, a 13 helyett milyen számot kell mondani? Az előbbi gondolatot használva adódik, hogy 37 a legjobb válasz, hiszen 37 egész szám között biztosan létezik 13 olyan, amelyeknek a hárommal való osztási maradéka ugyanaz. Ezeket a c_i-ket választva közülük bármelyik három összege osztható hárommal, így mindegy, melyik hármat választjuk, innen az első feladat alkalmazásával kiválasztható a megfelelő i, j, k számhármas.

Felmerül a gondolat, hogy a kiinduló feladatban a 13 javítható-e? Próbálkozzunk 12-vel, a bizonyítás akkor nem megy, ha az a_i-k között nincs öt olyan, hogy a hárommal való osztási maradéka azonos legyen. Ebben az esetben mindegyik maradék pontosan négyszer fordul elő. Megtehető, hogy pl. az első négy maradék legyen a 0, aztán négy 1 és végül négy 2: 0000 1111 2222. Ezek alá kell elhelyeznünk négy *a*, négy *b* és négy *c* betűt, amelyek a 0, 1 és 2 számokat jelentik valamilyen sorrendben. Ha valamelyik számnégyes alá három egyforma, vagy három különböző betű kerül akkor ezeket választva, alul is, felül is osztható lesz a kiválasztott három szám összege hárommal. Ezek után egy számnégyes alá két-két egyforma betű kerülhet csak. A 0000 alá kerüljön az *aabb* négyes, az 1111 alá ugyanez, vagy pl. *aacc* kerülhet. Ha a 2222 alá a kerül, akkor minden blokkból a választásával célhoz érünk. Ha a 2222 blokk alá *a*-t nem írunk, akkor *bbcc* kerül alá. Ekkor az első blokkból *a*-t, a másodikból *c*-t vagy *b*-t választunk, a harmadik blokkból pedig olyan betűt, amit még nem választottunk.

Ezek után adódik a kérdés, a 12 is javítható-e? A válasz: igen. Még 9 esetén is igaz az állítás. A bizonyítás úgy indul, hogyha a legtöbb egyforma maradék legalább öt az a_i-k között, akkor készen vagyunk. A legtöbb egyforma még lehet négy vagy három, mely esetekben az előbbihez hasonló gondolattal érhetünk célhoz. Nyolcra nem igaz az állítás, az ellenpélda:

0000 1111
aabb aacc

Értelem szerint az általánosításban szereplő 37 is javítható 25-re.

Most a feladatban szereplő segédfeladatot vegyük szemügyre. Kérdezhetjük ennek mintájára, hogy hány szám esetén garantálhatjuk, hogy lesz közöttük néhány, hogy az összegük osztható *n*-nel? Illetve kérdezhetjük azt is, hogy hány számot kell megadni ahhoz, hogy legyen közöttük *n* darab, hogy az összegük osztható legyen *n*-nel? Az előző Kürschák feladat volt, a második megoldása a KÖMAL-ban jelent meg 1982 decemberében Csirmaz László Kedvenc problémáim című cikkében.

HÍREK VERSENYEKRŐL

Bunyik Zoltán

Beszámoló a 2. Vajdasági Magyar Matematika Versenyről

Az 1998/99-es tanévben másodszor került megrendezésre Vajdaságban magyar nyelvű matematikaverseny a tartomány egész területén élő magyar ajkú felsős általános iskolások részére. A verseny szervezői a szabadkai **Új Kép** pedagógiai folyóirat és az újvidéki **Matematikai Iskola**.

A verseny célja a fiatal vajdasági magyar ajkú matematikatehetségek felkarolása. A jugoszláv versenyekre a magyar ajkú diákok terminológiai nehézségek miatt nehezen kapcsolódnak be, ezért sokan a tehetséggondozáson kívül rekedtek. Mivel a vajdasági magyar fiataloknak nem volt lehetőségük rendszeres versenyzésre, és az iskolákban szervezett tehetséggondozó munka is sokszor kívánnivalókat hagy maga mögött, a feladatok válogatása és megfogalmazása esetében arra törekedtünk, hogy minél több tanuló érdeklődését felkeltsük. Ezért adtunk előnyt az érdekes, a tanulók által is könnyen elképzelt szituációkba beágyazott feladatoknak. A legsikeresebb tanulókat magyarországi versenyeken való részvételre buzdítottuk.

Maga a verseny, a tervek szerint, az előző évi versenyhez hasonlóan két részből állt volna: a tanév során **levelező pontversenyből** és a tanév végén **zárthelyi döntőből**. Az első rész a levelező pontverseny három fordulón át zajlott márciustól májusig. Sajnos a háborús helyzet miatt a harmadik fordulót már nem sikerült terveink szerint megtartanunk, és a zárthelyi döntő is ugyanezen okok miatt maradt el. Az előállt helyzet miatt hivatalos győzteseket nem hirdettünk, de a pontverseny során legsikeresebb tanulókat könyvjutalmakkal díjaztuk. A könyvjutalmakat a következő kiadók adományozták: **Nemzeti Tankönyvkiadó; Eötvös Kiadó, Typotex, Vince Kiadó.** A tavalyi 61 részvevőhöz képest idén jelentősen emelkedett a versenyzők száma: 114 tanuló vett részt a versenyen. Hisszük, ez azt jelenti, jó úton haladunk. A három levelező forduló során a következő feladatok kerültek kitűzésre évfolyamok szerint:

V. osztály

1. Hány évesek a fiúk, ha ezt mondják életkorukról:
   Pista: „Két évvel vagyok idősebb Jancsinál"
   Karcsi: „Kétszer annyi idős vagyok, mint Jancsi volt három évvel ezelőtt."
   Jancsi: „Ha tíz év múlva Pista akkori életkorából levonjuk Karcsi mostani éveinek számát, akkor megkapjuk, hogy hány éves vagyok most."

2. Egy családban 5 gyermek van, életkoruk összege 53 év. A legidősebb gyerek kétszer olyan idős, mint a legfiatalabb, a középső életkora pedig páros szám. A gyerekek különböző életkorúak, és életkoruk egész számmal fejezhető ki. Hány évesek különkülön?

3. Egy téglalap területe 36 cm^2. Mekkora lehet a téglalap kerülete, ha az oldalak mérőszámai egész számok?

4. A diák elkésett és mentegetőzik. „Késik az órám. Ugyanis megmértem stopperórával, és az óramutatók két fedése között ponto-

san 65 perc telik el." Valóban késik az órája?

5. Péter 4 kg-mal nehezebb, mint Karcsi. Karcsi 6 kg-mal könnyebb, mint Gabi. Gabi édesanyja 70 kg, édesapja 81 kg. Legfeljebb hány kg-os lehet Péter, ha mind az öten beszállhatnak abba a liftbe, amelyen ez a kiírás áll: „Maximális terhelés 260 kg."

6. Karcsi egy könyv olvasásába kezdett. Első nap 25 oldalt olvasott el, majd naponként mindig 6-tal többet, egészen az ötödik napig. A hatodik napon is ugyanannyit olvasott, mint az ötödiken, majd a hátralevő napok mindegyikén 6-tal kevesebbet az előző napinál. Így az utolsó napon 19 oldalt olvasott volna, de a könyvből már csak 12 oldal volt hátra. Hány oldalas a könyv?

7. Az üzletben kétféle alma volt, kilogrammonként 15 dináros és 12 dináros. Pontosan 102 dinárért vásároltunk almát. Melyikből mennyit vettünk?

8. Egy osztályban minden tanuló tanul legalább egy idegen nyelvet az angol, német és francia közül. Franciául 10-en, angolul 20-an, németül 25-en tanulnak. Franciául és angolul 5, angolul és németül 6, németül és franciául 8, végül mindhárom nyelven 2 diák tanul. Hány tanuló van az osztályban?

9. Adott 9 látszólag egyforma érme, melyek közül 8 egyforma súlyú, 1 pedig nehezebb. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg súlyok nélkül. Legkevesebb hány mérés szükséges ahhoz, hogy kiválasszuk a nehezebb érmét?

10. 1999. január elseje péntekre esett. Milyen nap lesz az ezt követő 1999. nap?

11. Huszonnégy almát és ötvennégy körtét osztottunk szét néhány (egynél több) gyerek között. Mindenkinek ugyanannyi almát és ugyanannyi körtét adtunk. Hány gyerek lehetett? Hány almát és körtét kapott 1-1 gyerek?

12. Két bokorban 31 veréb pihent. Egy zörejre az elsőről 5 átrepült a másodikra, arról pedig 7 egy közeli magas fára. Ezután az első bokron kétszer annyi veréb maradt, mint a másodikon. Hány veréb pihent eredetileg az egyik és a másik bokron?

13. Oldd meg a következő osztássorozatot! Vedd száz kilenctizedének, a nyolckilencedének, a hétnyolcadának hathetedének, az öthatodának, a négyötödének, a háromnegyedének, a kétharmadának a felét!

14. A piacon egy 8 literes kannában 8 l tej van. Két vevő veszi meg, 4-4 litert vesznek. Az árusnál azonban csak egy 5 literes és egy 3 literes mérőedény van. Hogyan méri szét a tejet?

15. Egy tégla 2 kg meg egy fél tégla. Két tégla hány kg?

VI. osztály

1. A raktáron 7 hordó tele van borral, 7 félig van tele, 7 pedig üres. A hordókat három teherautóra kell felrakni úgy, hogy mindegyik teherautón ugyanannyi hordó legyen, és az egyenletes súlyeloszlás miatt mindegyik teherautó ugyanannyi mennyiségű bort szállítson.

2. Egy teremben öt különböző lámpa van. Mindegyiket önállóan lehet meggyújtani. Hányféleképpen éghetnek a lámpák, ha legalább az egyiknek égnie kell?

3. Hány éves a kapitány, hány gyermeke van, és hány méter hosszú a hajója? Ismert e három keresett egész szám szorzata: 32 118. A kapitány életkora 100-nál kisebb, de gyermekei számánál több. Vannak fiai is és lányai is a kapitánynak.

4. Bontsd fel a 100-at két olyan szám összegére, amelyek közül az egyik 5-tel osztva hármat, a másik 7-tel osztva négy maradékot ad!

5. Ági magyarból a félév folyamán csak 4-eseket és 5-ösöket szerzett. Magyarosztályzatainak átlaga: 4,6. Hány 5-öse és hány 4-ese lehetett magyarból, ha magyarosz-

tályzatainak száma 10-nél biztosan nem volt több?

6. A nyuszinak 15 nyúlugrásnyi előnye van, amikor a kutya üldözőbe veszi. Két kutyaugrás akkora, mint három nyúlugrás, de amíg a kutya négyet ugrik, a nyúl ötöt. Utoléri-e a kutyus a nyuszit, és ha igen, hány ugrással?

7. Három természetes szám számtani közepe 62. A két kisebb szám számtani közepe 50, a két nagyobbé 70. Melyik ez a három szám?

8. Tizenkét órakor az óramutatók fedik egymást. Hány órakor fogják legközelebb fedni egymást?

9. Egy iskolának 1000-nél több tanulója nincs, és ha ötösével, hatosával, hetesével vagy nyolcasával állnak sorba a diákok, akkor az utolsó sorban mindig egy tanuló marad. Hány tanulója van az iskolának?

10. Egy 10 m hosszú, előrehaladó gyereksor legvégéről a kísérőjük a sor elejére ment, majd amikor odaért, visszafordult, és ismét a sor végére ment. A kísérő háromszor olyan gyorsan haladt, mint a gyerekek. Mekkora utat tettek meg a gyerekek, mire a kísérő ismét a sor végére ért?

11. Hat fiú közül kettő biztosan almát lopott. Hugó azt mondta, hogy Csaba és Gábor. János szerint Dénes és Tamás. Dénes azt vallotta, hogy Tamás és Csaba tette. Gábor Hugót és Csabát vádolja. Csaba azt mondta, hogy Dénes és János a tolvaj. Tamás nem mondott semmit. A további nyomozás kiderítette, hogy az öt vallomás közül négyben az egyik bűnöst helyesen, a másikat helytelenül nevezték meg, míg az ötödik vallomásban szereplő fiúk ártatlanok. Kik loptak almát?

12. Hány különböző téglatestet építhetünk 36 darab egyforma, 1 cm-es élhosszúságú kockákból? Számold ki e téglatestek felszínét is!

13. Hét teherautóval, melyek teherbírása egyenként 3 tonna, 50 darab kőtömböt szeretnénk elszállítani. A kövek rendre 370, 372, 374, ..., 468 kg-osak. El lehet-e egy fordulóval szállítani a köveket?

14. Van 6 zsák gabonánk. Az egyes zsákok tömege 30, 49, 50, 53, 54 és 62 kg. Egy zsákban rozs van, a többiben vagy búza, vagy árpa. Összesen kétszer annyi búza van, mint árpa. Melyik zsákban milyen fajta gabona van?

15. Egy iskolában 60 tanár van. Közülük 39 kávét iszik, 28 teát iszik, 16 kávét és teát is iszik. Hány olyan tanár van, akik sem kávét, sem teát nem isznak?

VII. osztály

1. Egy dobozban 10 db kártya volt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 számokkal. Ági, Béla, Cili, Dóra és Elek egymás után 2-2 kártyát húzott. Dórát kivéve a többi gyerek elárulta a kihúzott számok összegét: Ági 5-öt, Béla 12-t, Cili 10-et és Elek 12-t mondott. Milyen számokat húzott Dóra?

2. Minden lehetséges módon zárójelezzük az $a : b : c : d$ kifejezést (a, b, c, d egész számok). Legfeljebb hány különböző eredményt kaphatunk?

3. Egy órának felcserélik a perc- és óramutatóját. Hány különböző, lehetséges időt tud mutatni az egyébként szabályosan járó óra (Ezek olyan időpillanatok, amikor nem tudjuk megállapítani erről az óráról, hogy a mutatókat felcserélték)?

4. Tomi és Robi vitatkozott egy vasúti kocsi folyosóján. Tomi így szólt: „Fogadni mernék, hogy a következő fülke utasai között akad kettő, akinek ugyanannyi ismerőse van a fülkében. Ezt úgy állítom, hogy még azt sem tudom, hányan vannak benn. Azt persze feltételezzük, hogy az ismeretségek mindig kölcsönösek." Ezek után fogadtak. A fülkében négyen ültek. Ki nyerte meg a fogadást?

5. 7 rabló a zsákmányolt aranyat úgy osztja el, hogy névsor szerint vesznek belőle annyit, amennyi az ott levő aranyak szá-

mának számjegyösszege (pl. ha a soron következő zsivány előtt 156 db arany van, akkor ő $1 + 5 + 6 = 12$ darabot vesz el). Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a bandavezérnek lett több. Hányadik a névsorban a főnök, s mennyi arany jutott neki?

6. Egy kőbányából 50 kőtömböt kell elszállítani. A kövek tömege rendre 145, 146, 147, ..., 194 kg, egy teherautó teherbírása 1060 kg. Felpakolhatjuk-e úgy a köveket 8 teherautóra, hogy egy fordulóval el tudjuk szállítani őket?

7. Az első 100 természetes szám közül válasszunk minél több számot úgy, hogy a kiválasztott számok közül egyik se legyen osztható semelyik másik kiválasztott számmal!

8. Feri, aki felsős, egy papírlapra felírta, hogy hány éves és hány évesek a nála fiatalabb testvérei. Ezután összeszorozta ezeket a számokat, majd ezt még megszorozta annyival, ahányas cipőt hord. Mindig egész számokkal számolt, és végül egy érdekes számot kapott eredményül: 10101. Hány éves Feri, hányas cipőt hord, hány testvére lehet és azok hány évesek?

9. Az osztályban 20 fiú van: 14 barna hajú, 15 barna szemű, 17-en 50 kg-nál nehezebbek, 18-an 160 cm-nél magasabbak. Legalább hány olyan fiúnak kell lenni, akik mind a négy fenti tulajdonsággal rendelkeznek?

10. Egy város két iskolájában összesen 1240 gyerek tanul. Az egyik iskola tanulói számának 4/5 része egyenlő a másik iskola tanulólétszámának 3/4 részével. Hányan tanulnak az egyes iskolákban?

11. A nagy csatában 100 kalóz közül 70 elvesztette fél szemét, 75 fél fülét, 80 fél kezét, 85 fél lábát. Legalább hány olyan kalóznak kell lennie, akik elvesztették fél szemüket, fél fülüket, fél kezüket és fél lábukat is?

12. Felbontható-e bármely háromszög 6 egyenlő szárú háromszögre? Ha igen, hogyan?

13. Adott 9 látszólag egyforma érme. Az áll rajtuk, hogy az első 101 g, a második 102 g és így tovább, a kilencediken az áll, hogy 109 g. Az egyik tömege azonban nagyobb annál, amit ráírtak, míg a többi tömege megegyezik a rájuk írt számmal. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg súlyok nélkül. Legkevesebb hány mérés szükséges ahhoz, hogy kiválasszuk a nehezebb érmét, ha a mérési tervet előre meg kell adnunk a laboránsnak, és a mérések eredményét csak a legutolsó mérés elvégzése után tudjuk meg?

14. Két gőzös egyszerre indul New Yorkból Lisszabonba, ahol 5 napot töltenek mielőtt visszatérnének New Yorkba. Az első óránként 30 mérföldet tesz meg odafelé és 40 mérföldet visszafelé. A második 35 mérföldet tesz meg óránként mindkét irányban. Melyik gőzös ér vissza elsőnek?

15. Egy ember almát árult: a nagyobb almából 3-at adott 10 dinárért, a kisebből 5-öt egy tízesért. Amikor már csak 30-30 eladó almája maradt mindkét fajtából, megkérte a fiát, hogy míg ebédel, foglalkozzon a vevőkkel. Mikor visszatért az ebédből, az összes alma elkelt, és a fiú 150 dinárt adott át az apjának.

– A 30 nagy almáért 100 dinárt kellett volna kapnod, a 30 kisebbért pedig 60-at, összesen tehát 160 dinárt.

A fiú meglepetten nézett rá.

– Biztos, hogy az összes pénzt odaadtam, amit kaptam, és nagyon vigyáztam a visszaadásnál. Nehezen ment itt nélküled a dolog, és mivel egyformaszámú kis és nagy alma maradt, ezért átlagárat számolva adtam el őket, 4-et 10 dinárért. 60-ban a 4 15-ször van meg, tehát biztos vagyok benne, hogy a 150 dinár jó.

Kinek van igaza?

VIII. osztály

1. A csintalan gyerek mindig rohan a mozgólépcsőn. Első nap 1 lépcsőt megy fel 1 másodperc alatt, így 20 lépéssel ér fel a tetejére. Második nap 2 lépcsőt megy fel 1 má-

sodperc alatt, ekkor 32 lépéssel ér fel ugyanazon mozgólépcsőn. Harmadik nap állt a mozgólépcső javítás miatt. Hány lépést kellett megtennie ekkor, ha egy lépéssel mindig 1 lépcsőt lépett?

2. Egy parti végén mindenki mindenkivel kezet fog. Hirtelen betoppan a szomszéd, de ő csak azokkal fog kezet, akiket ismer. Összesen 68 kézfogás volt. Hány embert ismert a szomszéd?

3. Gyuri 5 órán át sétált. Először sík úton, majd hegynek fel, azután megfordult, és ugyanazon az úton tért vissza oda, ahonnan elindult. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le pedig 6 km-t tett meg óránként. Mekkora utat járt be összesen?

4. Ötszemélyes autókkal és 9 személyes mikrobuszokkal el kell szállítani egy 87 tagú turistacsoportot. Hány autót és hány mikrobuszt rendeljünk, ha azt akarjuk, hogy minden ülést kihasználjunk, és mindenki egyidejűleg utazzon?

5. Peti olyan számítógépes programot készített, amely olyan törteket tud összeadni, amelyeknek 1 a számlálója, a nevezők azonban különbözőek. Büszkén újságolja barátjának, Palinak, hogy 1999 ilyen tört összegére éppen 11-et írt ki a program. Pali számolt egy kicsit, majd azt mondta: „Van még mit javítani azon a programon." Honnan tudta?

6. Egy 5×5-ös sakktábla minden mezőjében egy-egy bolha van. Adott jelre, egyszerre mindegyik bolha átugrik a tábla valamelyik élben szomszédos mezőjére. Lehetséges-e, hogy az ugrások elvégzése után minden mezőben ismét pontosan egy bolha lesz?

7. Négy autó egy-egy rendszámtábláját leszerelik, vagy az elülsőt vagy a hátulsót veszik le. Hányféleképpen lehet úgy visszarakni mind a négy rendszámtáblát az autókra, hogy pontosan két tábla kerüljön a helyére?

8. Egy utcaszakasz egyik oldalán saroktól sarokig a házszámok összege 117. Mi az utcaszakasz elejétől számított ötödik háznak a száma?

9. Egy farmon több ló van, mint kacsa. A tehenek száma harmada a lovak és kacsák együttes számának. A kacsák és lovak fejei és lábai számának összege 100. Hány tehén van a farmon?

10. Egy folyó partján téglalap alakú területet szeretnénk bekeríteni 100 m hosszú kerítéssel. (A teleknek csak három oldalát kerítjük el, a negyedik oldal a folyó.) Hogyan válasszuk meg a telek oldalainak méreteit, hogy a bekerített terület a lehető legnagyobb legyen?

11. Egy apának 7 fia van. Az első és a negyedik fiú együtt 9 éves, az 1. és a 6. együtt 8 éves, a 2. és az 5. együtt 8 éves, a 2. és a 3. együtt 9 éves, a 3. és a 6. együtt 6 éves, a 4. és a 7. együtt 4 éves, a 7. és az 5. is együtt 4 éves. Hány évesek a fiúk különkülön?

12. Lehet-e öt darab gyufásdobozt úgy összeépíteni, hogy mindegyiknek pontosan három szomszédja legyen?

13. Melyik az a legkisebb 67-tel osztható szám, amely 1999-re végződik?

14. Egy osztály tanulói közül mindenki megoldott legalább egy feladatot a három közül. 7 tanuló megoldotta az első feladatot, de a harmadikat nem. 3 tanuló megoldotta a második feladatot, de a harmadikat nem. 5 tanuló megoldotta az első és a második feladatot is, 7 az elsőt és a harmadikat is. 11-en csak a harmadik feladatot oldották meg. 6 tanuló megoldotta a második feladatot. Csak a második és harmadik feladatot viszont egyetlen tanuló sem oldotta meg. Hány tanuló van ebben az osztályban, és hányan oldottak meg pontosan két feladatot?

15. Felbontható-e bármely háromszög 5 egyenlő szárú háromszögre? Ha igen, hogyan?

Zala Megyei Matematika Verseny

1999. november

9. osztály

1. A nyári fürdőruhák árát a jó idő megérkeztével áprilisban 12%-kal emelték. Az egyre növekvő kereslet miatt májusban újabb 24%-os áremelés következett. A szezon végén, szeptemberben a kereskedő a fürdőruhát ismét annyiért szeretné adni, mint a szezon elején, április előtt. Hány %-os árengedményt tüntessen fel az akciót hirdető szórólapokon?

6 pont

2. Edömér elhatározta, hogy megtréfálja barátait úgy, hogy a héten kedden, csütörtökön és vasárnap minden mondata hazugság lesz, míg a többi napon mindig igazat mond. Milyen nap van ma, ha ma reggel kijelentette, hogy holnap igazat fog mondani?

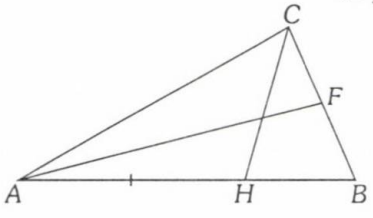
8 pont

3. Reggel 6 órától számítva mikor fedik harmadszor egymást a mutatós óra kis- és nagymutatói?

10 pont

4. Az ABC háromszögben F felező-, H pedig harmadolópontja az őt tartalmazó oldalaknak (lásd az ábrát!). Milyen arányban osztja egymást az AF és CH szakasz?

14 pont



5. Egy háromjegyű szám egyenlő jegyei összegének a 12-szeresével. Melyik ez a szám?

14 pont

6. Három különböző, 1 számlálójú, pozitív egész nevezős tört összege 1. Melyek ezek a törtek?

14 pont

7. Két kör, melynek sugarai r és R, kívülről érintik egymást. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti mindkettőjüket, és érinti a közös külső érintőjüket is?

16 pont

8. Adott egy „a" és egy „b" szakasz. Szerkesszünk egy „a" és egy „b" oldalú négyzetet úgy, hogy az utóbbi csúcsai az előbbinek a kerületére essenek! Vizsgáljuk a megoldhatóságot is!

18 pont

10. osztály

1. Oldd meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{6}{2+x}-\frac{x+2}{x-2}-\frac{x^2}{4-x^2}=0$$

8 pont

2. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}\right)^{-1}\right)$$

8 pont

3. Egy pók egy henger alakú helyiség mennyezetének peremétől a padló átellenes pontjába kétféleképpen is eljuthat ugyanakkora úton:

a) Függőlegesen leereszkedik, majd a padló átmérője mentén folytatja útját.

b) Végig a palláston halad, a palástot síkba terítve útja egyenes szakasz.

Számítsd ki a henger magasságának és átmérőjének arányát!

12 pont

4. Az a, b befogójú derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja köré a, a másik végpontja köré b sugarú kört rajzolunk. Bizonyítsd be, hogy az átfogónak a két kör közös részébe eső szakasza ugyanolyan hosszú, mint a háromszögbe írt kör átmérője!

13 pont

5. Bizonyítsd be, hogy ha a tízes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ szám osztható 7-tel, akkor a $\frac{\overline{bc}+16a}{\overline{bc}-61a}$ tört egyszerűsíthető 7-tel!

14 pont

6. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$$

14 pont

7. Az $ABCD$ konvex négyszög CD oldalegyenesére a D, valamint a C csúcsban állított merőlegesek P, illetve Q pontban metszik az AB oldalegyenest.
Bizonyítsd be, hogy ha $AQ = QC$ és $BP = PD$, akkor $ABCD$ húrnégyszög!

15 pont

8. Melyik az a legkisebb pozitív páratlan szám, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 360-nak?

15 pont

11. osztály

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$1+\sin 2x = 4\sin^2 x$$

10 pont

2. Két pozitív szám mértani közepe 6-tal nagyobb a kisebb számnál, és 1,5-del kisebb a két szám számtani közepénél. Melyik ez a két szám?

10 pont

3. Az ABC háromszögben $AB + BC = 8\sqrt{3}$, a BC oldalhoz tartozó magasság 3 egység és az $ABC\sphericalangle = 60°$. Mekkora az AC oldal?

12 pont

4. Oldjuk meg pozitív egész számok körében az $x + y + xy = 1999$ egyenletet!

12 pont

5. Meddig kell összeadni a pozitív egész számokat 1-től kezdve, hogy összegül olyan háromjegyű számot kapjunk, amely azonos jegyekből áll?

12 pont

6. Egy kör köré írható érintőtrapéz szárainak hossza 3 és 5 cm. A trapéz középvonala az adott trapézt két olyan részre osztja, amelyek területének az aránya 5 : 11. Mekkorák a trapéz párhuzamos oldalai?

14 pont

7. Egy hegyesszögű szögtartomány tetszőleges P pontjából a szög száraira bocsássunk merőlegeseket! E merőlegesek a szögszárakat a B és C pontokban metszik. A szög A csúcspontjából a BC oldalra bocsátott merőleges a BC-t a D pontban metszi. Igazoljuk, hogy a $CAD\sphericalangle = BAP\sphericalangle$!

14 pont

8. Tekintsük az $y = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$ másodfokú függvénnyel értelmezett parabolasereget, ahol m nullától különböző, valós paramétert jelöl.

a) Igazoljuk, hogy a parabolasereg minden eleme egy rögzített ponton megy át! Határozzuk meg ezt a pontot!

b) Keressük meg a parabolák maximumainak, illetve minimumainak a mértani helyét! Milyen összefüggésnek tesznek eleget ezek a pontok?

16 pont

12. osztály

1. A k_1 kör egyenlete $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$. A k_2 köré: $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 84 = 0$. Az x-tengely melyik pontjából húzhatók egyenlő hosszúságú érintő szakaszok a két körhöz?

11 pont

2. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a

$$(p-1)^2\sin^2 x + (p-1)(p^2-3)\sin x = \\ = 2(p^2-1)$$

egyenletnek gyöke a valós számok között?

11 pont

3. Oldjuk meg a valós számok körében az

$$\log_x(x+y) + \log_y(x+y) = 4$$
$$(x-1)\cdot(y-1) = 1$$

egyenletrendszert!

11 pont

4. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara, körülírt körének sugara és kerülete (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat szomszédos elemei. Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszögben a hegyesszögek tangenseinek összege 4!

11 pont

5. Egy vízszintes síkra négy, egymást érintő r sugarú gömböt helyezünk el úgy, hogy középpontjaik négyzetet alkossanak. A négy gömbre ráteszünk egy ötödik r sugarú gömböt, amelyik mind a négy másikat érinti. Milyen távolságra van a síktól az ötödik gömb legmagasabban lévő pontja?

14 pont

6. Egy r sugarú körbe olyan konvex hatszög írható, amelynek három oldala 2, másik három oldala 5 egység hosszúságú. Számítsuk ki a kör sugarát!

14 pont

7. Melyek azok az $(x; y)$ egész számpárok, melyek kielégítik a következő egyenletet:

$$xy + \frac{x}{y} + 2x = 75.$$

14 pont

8. Adjuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{\log_3^2 x - 2\log_3 \sqrt[3]{x} + 1}$ függvény maximumát és minimumát az $[1; 3]$ intervallumon!

14 pont

8. osztályosok matematika versenye

Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

1999. november 26.

1. Az $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 98\cdot 99\cdot 100}{10^{100}}$ törtet egyszerűsítjük, amíg lehet. Mi lesz a kapott tört nevezője?

2. Egy sakk szimultán keretében a sakkmester egyszerre több táblán több ellenféllel sakkozik. Az első óra elteltével a mester megnyerte a játszmák 90%-át és elveszít egy játszmát. A játszmák befejezésekor a mester az első óra eltelte után be nem fejezett játszmáknak csak 20%-át nyeri meg, 2 játszmát elveszít, és a megmaradt 2 játszma döntetlenül végződik. A sakkmester a játszmák hányad részét nyerte meg?

3. Az ABC derékszögű háromszög AC befogója 4, BC befogója 3 egység. Az AC befogóra kifelé az $ACPQ$, az AB átfogóra kifelé az $ABRS$, a BC befogóra kifelé pedig a $BCTV$ négyzetet rajzoltuk. Számítsuk ki a $PQRSTV$ hatszög területét!

4. Bizonyítsuk be, hogy a 12; 1122; 111222;... számok mindegyike két szomszédos pozitív egész szám szorzata!

5. Leírtuk sorban egymás után a pozitív egész számokat 1-től 2000-ig. Döntsük el, hogy az így kapott tízes számrendszerbeli szám négyzetszám-e vagy sem!

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.
Beküldési határidő: 2000. március 31.

140. Mely pozitív egész n értékek esetén egész szám az $\left(1999+\frac{1}{2}\right)^n+\left(2000+\frac{1}{2}\right)^n$ kifejezés értéke?

141. Igazoljuk, hogy ha az x és y pozitív számok kielégítik az

$$1999^x + 1999^y = 2000$$

egyenletet, akkor $x + y > 1$!

Dályay Pál Péter, Szeged

142. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n és $x_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ esetén

$$\frac{x_1^2-x_1+1}{x_2^2+x_2+1}+\frac{x_2^2-x_2+1}{x_3^2+x_3+1}+\ldots+\frac{x_n^2-x_n+1}{x_1^2+x_1+1}\geq\frac{n}{3}!$$

Bencze Mihály, Brassó

143. Jelölje a hegyesszögű ABC háromszög területét T, körülírt körének sugarát R; a magasságok talppontja által meghatározott $A_1B_1C_1$ háromszög területét t, körülírt körének sugarát r. Mutassuk meg, hogy $\frac{T}{t}=\frac{R}{r}$!

Bíró Bálint, Eger

144. Egy pozitív egész számot *szerencsésnek* nevezünk, ha előáll olyan (nem feltétlenül különböző) pozitív egészek összegeként, amelyek reciprokainak összege 1. Például a 11 *szerencsés*, ugyanis $11 = 2+3+6$ és $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. *Szerencsétlen*nek nevezzük azokat a számokat, amelyek nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal. Hány *szerencsétlen* szám van?

Feladatmegoldások (125-129. feladatok)

125. Legfeljebb hány pontban metszheti egymást a sík 9 darab körvonala és 47 darab egyenese?

Nagy Erzsébet, Szeged

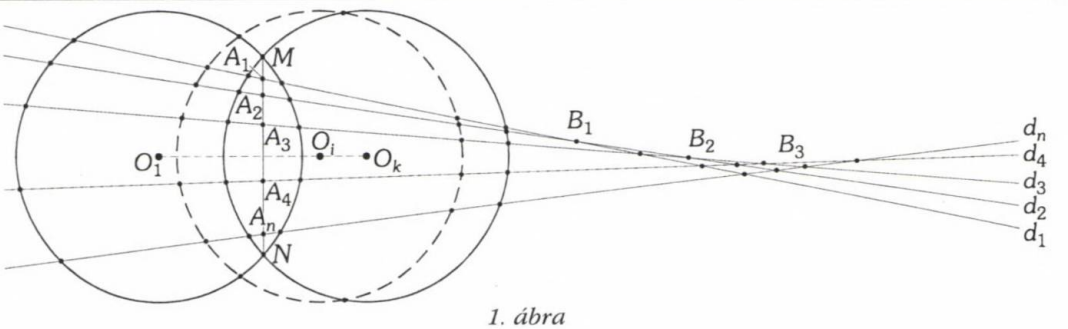
Megoldás: A metszéspontok száma akkor maximális, ha (1) bármely két körnek két közös pontja van; (2) bármelyik egyenesnek bármelyik körrel két közös pontja van; (3) bármely két egyenes metszi egymást; (4) nincs olyan metszéspont, hogy azon három (vagy több) vonal halad át a tekintettek közül. Ekkor a metszéspontok száma:

$$2\binom{9}{2}+\binom{47}{2}+2\cdot 9\cdot 47=1999.$$

Be kell még látni, hogy ez a maximum meg is valósítható, azaz meg lehet adni köröknek és egyeneseknek egy olyan rendszerét, amelyik teljesíti az (1)-(4) feltételeket. A konstrukciót általánosan adjuk meg k kör és n egyenes esetére $(k > 1, n > 1)$.

Tekintsük a sík k darab r sugarú körvonalát úgy, hogy azok középpontjai egy egyenesre illeszkedjenek, és ha O_1, O_2, ..., O_k jelöli a középpontokat, akkor $O_1O_k < 2r$ teljesüljön. (*1. ábra*)

Könnyen látható, hogy az (1) feltétel ezen körökre teljesül, és mivel a középpontok egy



1. ábra

egyenesre illeszkednek, ezért három körvonal nem mehet át egy ponton. Ha az O_1 illetve O_k középpontú körök közös pontjai M és N, akkor az MN szakasz belső pontjai mindegyik körlapnak belső pontjai. Legyenek A_1, A_2, ..., A_n az MN szakasz tetszőleges belső pontjai az *1. ábrának* megfelelő elhelyezésben. Ezeken a pontokon átmenő d_1, d_2, ..., d_n egyenesek mindegyike két pontban metsz minden kört, azaz (2) teljesül. Ezek után úgy kell megválasztani a tekintett egyeneseket, hogy semelyik három (vagy több) ne illeszkedjen egy pontra. Evégett legyen B_1 az A_1-en átmenő d_1 egyenesnek egy az O_k középpontú körön kívüli pontja. A d_2 egyenes illeszkedjen az A_2 és B_1 pontokra, és legyen ezen egyenes egy B_1-en túli pontja B_2. d_3 illeszkedjen az A_3 és B_2 pontokra, és jelölje egy B_2-n túli pontját B_3. Ezt a konstrukciós eljárást folytatva látható, hogy az A_i és B_{i-1} pontokra illeszkedő d_i egyenes metsz minden d_m $(m < i)$ egyenest, ugyanis A_i ezen egyenesek által meghatározott két félsík egyikében van, B_i (a d_i egyenes B_{i-1}-en túli pontja) pedig a másikban. Az egyenesek ilyen felvétele tehát biztosítja (3) teljesülését. Ha az A_1, A_2, ..., A_n pontokat az MN szakaszon úgy tömörítjük, hogy a d_1, d_2, ..., d_n egyenesek a körlapok által lefedett síkrészen belül ne menjenek át a körök közös centrálisával párhuzamos, az M, illetve N pontra illeszkedő egyenesek és a közös külső érintők által meghatározott sávokba (itt vannak a körök közös pontjai), akkor a (4) feltétel is maradéktalanul teljesül.

Zsidó-Nagy György, Kolozsvár

A megoldók száma: 5.

126. Legyen $f(x)$ egy olyan n-edfokú polinom $(n \geq 1)$, amelyre $f(k) = \frac{k}{k+1}$ minden $k \in \{0; 1; ...; n\}$ esetén. Határozzuk meg az $f(n+1)$ értékét!

Megoldás: A feltételből következik, hogy a $g(x) = (x+1)f(x) - x$ $(n+1)$-edfokú polinom gyökei 0, 1, 2, ..., n, ezért

$$g(x) = (x+1)f(x) - x = \\ = cx(x-1)(x-2)...(x-n), \qquad (1)$$

ahol c egy 0-tól különböző konstans. Ha (1)-ben $x = -1$, akkor

$$g(-1) = 1 = c(-1)^{n+1}(n+1)!,$$

ahonnan

$$c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Helyettesítsünk most (1)-be $x = n+1$-et. Ekkor

$$g(n+1) = (n+2)f(n+1) - (n+1) = \\ = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)n(n-1)\cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = (-1)^{n+1},$$

ahonnan

$$f(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

Több megoldás alapgondolata alapján

A megoldók száma: 6.

127. Igazoljuk, hogy ha α_1, α_2, ..., α_n nemnegatív számok, és létezik $\sigma \in S_n$ (S_n az $\{1; 2; ...; n\}$ halmaz permutációinak halmaza) úgy, hogy $\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)} \leq \pi$ minden $i \in \{1; 2; ...; n\}$ esetén, akkor

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \leq \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)!$$

A KöMaL F. 3186. feladatának általánosítása.

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Az $x \mapsto \cos x$ függvény konkáv (a második derivált negatív) a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, ezért Jensen tétele (lásd például Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek – Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995. – 36-41. oldal) alapján, ha $x_i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $(i = 1, 2, ..., n)$, akkor

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \le \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Legyen $x_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)}}{2}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Ekkor $x_i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, továbbá $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Jensen tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)}}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \le$$
$$\le \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right). \qquad (1)$$

Másrészt, mivel $\frac{\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)}}{2} \le \frac{\pi}{2}$, ezért

$$\frac{\cos\alpha_i + \cos\alpha_{\sigma(i)}}{2} \le \cos\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{\sigma(i)}}{2}\right). \qquad (2)$$

Teljesül továbbá, hogy mivel σ az első n pozitív egész egy permutációja, ezért

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\alpha_i + \cos\alpha_{\sigma(i)}}{2} = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i . \qquad (3)$$

(2) és (3) felhasználásával (1)-ből azonnal adódik a kívánt egyenlőtlenség.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely
Zsidó-Nagy György, Kolozsvár

A megoldók száma: 4.

128. Legyen $a_1, a_2, ..., a_n$ az első n pozitív egész szám egy permutációja, és legyen

$$S = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + ... + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

Határozzuk meg az első n pozitív egész szám összes lehetséges permutációjához hozzárendelt S összegek átlagát (számtani közepét)!

Megoldás: Írjuk fel az 1, 2, ..., n számok összes lehetséges permutációit, ezek rendre

$$1, 2, ..., n$$
$$1, 3, ..., n$$
$$\vdots$$
$$a_1, a_2, ..., a_n$$
$$\vdots$$
$$n, n-1, ..., 1$$

Az $n!$ számú permutáció mindegyikéből soronként $n - 1$ darab kéttagú különbség képezhető. Bármely két szomszédos elem az 1, 2, ..., n számok egy-egy másodosztályú kombinációját alkotja. Az $n!$ számú sorban képezhető összes kéttagú különbségek száma $n! \cdot (n - 1)$. A továbbiakban azt kell észrevennünk, hogy bármely $i, j \in \{1; 2; ...; n\}$ és $i \ne j$ esetén egy adott (a_i, a_j) számpár előfordulásának száma $\frac{n! \cdot (n-1)}{\binom{n}{2}}$. A feladatban szereplő S összegekben az összes kéttagú kombinációból képzett különbség négyzete előfordul, ezért ha Φ jelöli az összes S összegek összegét, akkor

$$\Phi = \frac{n! \cdot (n-1)}{\binom{n}{2}}[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 +$$
$$+ ... + (a_1 - a_n)^2 + (a_{n-1} - a_n)^2] =$$
$$= \frac{n! \cdot (n-1)}{\binom{n}{2}}[(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) - \qquad (1)$$
$$- 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_n + ... + a_{n-1}a_n)].$$

(1)-ben az első n pozitív egész négyzetének összege, és az összes lehetséges kétszeres szorzat található, amelyeket zárt alakra tudunk hozni. A négyzetek összegére nézve

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A páronkénti szorzatok összegzéséhez tekintsük a következő felírást:

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + ... + 1 \cdot n$$
$$2 \cdot 3 + ... + 2 \cdot n$$
$$\vdots$$
$$+ (n-1) \cdot n.$$

Ha itt oszloponként összegzünk, akkor kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} k[1+2+\ldots+(k-1)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(k-1)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$
$$= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}.$$

Így a keresett átlag

$$\frac{\Phi}{n!} = \frac{(n-1)}{\binom{n}{2}}\left[(n-1)\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{12}\right] = \frac{n^3-n}{6}.$$

Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép

A megoldók száma: 6.

129. Melyek azok a nem négyzetszám pozitív egész n számok, amelyekre $\left[\sqrt{n}\right]^3 \mid n^2$? ($[x]$ az x szám egész részét jelöli.)

Megoldás: Legyen $\left[\sqrt{n}\right] = k$. n nem négyzetszám, ami pontosan akkor teljesül, ha $k^2 + 1 \le n \le k^2 + 2k$. Keressük tehát azon k pozitív egészeket, amelyekre a $\frac{(k^2+x)^2}{k^3}$ hányados értéke egész szám az $1 \le x \le 2k$, x egész feltétel mellett. Ez csak az $x = k$ és $x = 2k$ esetekben teljesül.

Ha $x = k$, akkor

$$\frac{(k^2+k)^2}{k^3} = \frac{k^4+2k^3+k^2}{k^3} = k+2+\frac{1}{k}$$

egész pontosan akkor, ha $k = 1$, ahonnan $n = 2$.

Ha $x = 2k$, akkor

$$\frac{(k^2+2k)^2}{k^3} = \frac{k^4+4k^3+4k^2}{k^3} = k+4+\frac{4}{k}$$

pontosan akkor egész, ha k értéke 1, 2 vagy 4. Innen a lehetséges n értékek: 3, 8, 24.

A feladat feltételeinek tehát a 2, 3, 8, 24 számok felelnek meg.

Dályay Pál Péter, Szeged
Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Dályay Pál Péter, Szeged (125-129.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (126., 128., 129.); Schutzbach Mártonné, Siófok (125.); Simon József, Csíkszereda (125., 126., 128., 129.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (126-129.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (125., 126-128. 2 mód, 129.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (125-129.).

* * *

Helyreigazítás: A Matematika Tanítása szerkesztősége ezúton kér elnézést *Ambrus Gabriellától* és az olvasóktól. Ugyanis az 1999/5. szám címlapján tévedésből szerepelt a *„Nyitott" és „nyitható" feladatok a tanárképzésben és a matematikaoktatásban* cím, a cikk viszont nem jelent meg ebben a számban.

Több mint 250 feladat versenyekre készülő diákoknak

A feladatgyűjtemény a Kalmár László matematikaverseny 1994 és 1998 közötti megyei és országos fordulóinak feladatait valamint azok megoldásait tartalmazza. A kötet hasznos segítséget nyújthat a versenyekre való felkészüléshez tanárnak, diáknak egyaránt, de színesítheti a szakköri és a tanórai munkát is. Tanár szakos egyetemisták, főiskolások részére is ajánlható feladatösszeállítást tartalmaz.

Szép Magyar Könyv díjas tankönyvsorozat informatikából

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 470-101, 488-282
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73., Tel.: (62) 485-522

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Beszámoló egy amerikai nyári matematikatáborról

(Béky Bence)

Az integráció elve a matematika tanításában

(Dr. Papp Margit – dr. Ambrus András)

A Hajdú-Bihar megyei Matematikai Versenyről

(Dr. Kántor Sándorné)

VIII. ÉVFOLYAM 2000 **2**

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda kft.-ben

TARTALOM

Beszámoló egy amerikai nyári matematikatáborról
Béky Bence
tanuló, Fazekas Mihály Gimnázium, Budapest

Az integráció elve a matematika tanításában
Dr. Papp Margit
JPTE, Pécs
Dr. Ambrus András
ELTE, Budapest

A Hajdú-Bihar megyei Matematikai Versenyről
Dr. Kántor Sándorné
Debreceni Egyetem, Debrecen

Beszámoló a III. Hegyi Lajos Matematikai Emlékversenyről
Dáné Károly
Marosvásárhely

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailben (kiado@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Béky Bence

Beszámoló egy amerikai nyári matematikatáborról

Az Egyesült Államokban is szokás, hogy az egyetemek táborokat szerveznek középiskolások részére. Ezt tette az SWT (Southwest Texas State University, azaz Délnyugat-Texasi Állami Egyetem) is, amikor 1999 nyarán tizedszerre rendezte meg nyári matematikatáborát (Honors Summer Math Camp)[1]. Mivel angolul tanulok általános iskolás korom óta, és jelenleg tanulmányaimat a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium speciális matematika tantervű hatosztályos gimnáziumi tagozatán folytatom, ezért szüleimmel úgy gondoltuk, tudásom próbára tétele és tapasztalatok szerzése végett részt veszek eme táborban. Miután megszereztem az egyetem elérhetőségét, írtam egy levelet a tábor főszervezőjének[2], aki még aznap válaszolt, közölve, hogy örömmel fogadnak, tekintettel versenyeredményeimre[3] és arra, hogy ilyen távolról még nem vett részt senki a programjukon. Néhány, egyre személyesebb hangvételű levélben megbeszéltük a részleteket, majd június 13-án, vasárnap kora reggel megkezdtem utazásom Texasba.

A tábor hat hétig tartott, június 13-tól július 24-ig, 77 résztvevővel. Felük új diák volt, a többi tanuló másodszor jár itt, illetve 17 „többszörösen visszaeső" csapatvezető volt, akik az esti munkánkat irányították, ahol csapatmunkát tanultunk, ami jellegzetes amerikai fogalom, és a csapattagjaiknak apró-cseprő dolgaival foglalkoztak, nagy terhet levéve a tanárok válláról. A nagyfokú szervezettség, többszintes munkamegosztás szintén amerikai találmány. Rajtam kívül mindenki az USA-ból jött, felerészben texasiak, a többiek más államból voltak. Egyedül én képviseltem az európai kultúrát (és miattam lett nemzetközi a tábor).

Nem csupán egy óceán választ el minket az Államoktól. Ott más az emberek gondolkodásmódja, más körülmények között élnek. Más az életvitelük. Sokkal közvetlenebbek, nyíltabbak. Az angolokkal ellentétben, akik megtalálták a módját, hogy magázódjanak, ők mindig mindenkivel közvetlenül beszélnek, úgy köszönnek, „Hi", és keresztnéven szólítják egymást. Talán én is e közvetlen, személyes életforma hatására írom e beszámolót ilyen hangnemben.

Sok meglepetés ért már megérkezésem előtt, az úton is. Ilyen volt például még Európában az amerikai légitársaság egyik alkalmazottja, aki föltett nekem néhány biztonsági kérdést a svájci repülőtéren, mielőtt fölszálltam volna az Amerikába tartó járatukra. Ekkor hallottam először amerikai akcentust, amely igen szokatlannak tűnt számomra. Ugyan tisztán és érthetően, de gyorsan beszélt, számomra szokatlan szófordulatokkal. Gyakran használta például az „OK", „That's OK" kifejezéseket a brit angolban elterjedt, általam megszokott „That's fine", „I see", „Well" helyett. Majd az USA-ban egy belföldi járaton találkoztam egy úrral, aki egy számítástechnikai cégnél dolgozik, és szintén különös stílusban kommunikált: túl vizuálisan. Gyakran leírta gondolatait, vagy ábrákat, képeket rajzolt. Volt nálam néhány érdekes determináns, amit a tanárom adott nyárra, persze csak kedvtelésből. Ezekkel nagyon jól elszórakoztunk, közösen számolgattuk ki őket, és megállapítottuk, hogy ugyanezekre alapul az inhomogén lineáris egyenletrendszerek egy hatékony, jól progra-

[1] Elérhető az interneten a http://www.math.swt.edu/mity/mathcamp címen.

[2] Dr. Max Warshauer (max@swt.edu), Director of Math Institute for Talented Youth.

[3] 1999/2000 Eötvös Fizikaverseny harmadik díj, 1998/1999 Arany Dániel Matematikaverseny első díj, Mikola Sándor Fizikaverseny hetedik hely, korábban kiemelkedő helyezések a Zrínyi Ilona, Kalmár László és Varga Tamás matematikaversenyeken, Nemes Tihamér számítástechnikaversenyen és a KöMaL matamatika és fizika pontversenyében.

mozható megoldási módszere, mégis túl sok hibalehetőséget rejtenek magukban.

A repülőtérre kijött értem és egy philadelphiai diákért két tanár, és elindultunk az egyetemre. Ekkortájt még elég éber voltam, hogy fölfigyeljek néhány dologra. Például, hogy az autóik sokkal nagyobbak, mint a mieink. Majdnem mindegyik kisbusz, vagy ahogy ők hívják, *van*. Náluk a forgalmi dugók, a nagyméretű autók tárolása, a környezetszennyezés és a magas benzinfogyasztás nem jelentenek problémát, legalábbis nem látszik. Ezek az autók, mint nálunk a kamionok, tolatáskor szaggatottan sípolnak. Az már kevésbé lepett meg, hogy angolszász mértékegységeket használnak.

Miután megérkeztünk a campusra, ugyan már nagyon fáradt voltam, még bemutattak a főszervezőnek, Maxnek, aki a számelméletórákat is tartotta. Körbevezetett minket a campuson, és megismerkedtünk a többi tanárral is. Nagy meglepetésemre egyikük tudott jó néhány szót magyarul, pl. „nem jó", „sajnos", „zsömle". Leírni biztos nem tudta őket, mint ahogy Erdős Pál nevét sem tudták sem leírni, sem kiejteni, pedig sokszor beszéltünk róla, mint kiváló matematikusról, hiszen egyszer ott járt, és igen nagy hatással volt rájuk.

Az időeltolódás miatt másnap korán ébredtem, és körbejártam a campust, hogy megismerkedjek az épületekkel. Újat azonban nem azok jelentettek; hanem amikor később láttam, hogyan zajlik bennük az emberek élete, hogyan nyílik meg előttem egy másik világ. A tábor keretében megnéztünk néhány tanszéket közelebbről, részt vettünk egyetemi programokon, és voltak csak nekünk szervezett programok is, előadások és kirándulások, amiken még jobban megismerhettem az amerikai kultúrát és gondolkodásmódot.

A fő cél viszont a matematika volt. Kíváncsian vártam, vajon milyen szintű az oktatás, mennyire intenzív, és mekkora szakszókincset igényel. Ezekre a kérdésekre hamar választ kaptam. Az órák rögtön másnap, hétfőn kezdődtek. Hetente öt nap tanultunk, jól szervezett órarend szerint.

Az első óra reggelizés után kezdődött. Számelmélet volt, amelyet osztályfőnöki jellegű rész vezetett be: Max kihirdette a táborral kapcsolatos tudnivalókat (a következő pár nap és a hétvége programja, vendégelőadók). Ezen az órán mindenki részt vett, még az is, aki negyedszerre járt itt. Amit tanultunk, az érthető volt, élvezetes, és volt mindenkinek egy biztos közös témája. A negyedik héten eljutottunk néhány fontos algebrai tételhez[4], ami itthon is hasznosnak bizonyult: az itthoni osztály nyár végi egyhetes matematikatáborában előadtam pár óra alatt, mint az idei tananyag részét. A tábor végére Gauss egy fontos tételét bizonyítottuk be[5].

A következő óra egy matematikai szoftver használatáról szólt. Mivel ez számomra kevéssé volt fontos, még az első héten átkértem magam egy magasabb szintű órára, mégpedig analízisre, hogy még hasznosabban teljen a tábor. A tanár, Terry, nagyon jó stílusban tanított, precízen és élvezhetően. Miután hazajöttem, sokáig kellett keresnem, hogy megtaláljam azt az analíziskönyvet[6], amely hasonlóan pontosan fogalmaz. Terry szeretett kapcsolatot tartani a hallgatósággal. Gyakran, amikor valami súlyosabb dolgot magyarázott, és látta, időbe telik nekünk fölfogni, azt mondta, „Say yes". Ilyenkor egy emberként fölkiáltottunk: „YES!", jelezvén, hogy természetesen értjük, miről van szó. Néha fölírt egy végtelen összeget a táblára, és megkérdezte, mi az. Hamar megtanultuk, hogy a konvergens összeg neve „number", a divergensé „chalk"[7]. A tehetségesebb diákokkal külön foglalkozott, személyre szóló példákat adott nekik[8]. Kirándulásokon gyakran beszélgettünk a tananyagról. Egy alkalommal elmentünk Austinba, hogy megnézzünk egy musicalt, a *Big River* címűt, amely Huckleberry Finn történetét dolgozza föl, és hogy elmenjünk egy igazi *steakhouse*ba, hogy megkóstoljunk egy texasi specialitást, a *Chicken fired steak*et. Ezen a kiránduláson beszéltünk egy tételről[9], aminek Terry

[4] Véges csoport rendjét minden elem rendje osztja, és ha a csoport elemei a maradékosztályok prím modulusa, a csoportművelet pedig a szorzás, akkor van generátorelem.

[5] Ha p, q prímek: $\frac{p}{q}.\frac{q}{p} = -1 \Leftrightarrow 2 \mid \left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$.

[6] ELTE TTK T. Sós Vera: Analízis, kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[7] Például $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ „number", azaz szám, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ „chalk", azaz csupán krétaszemcsék halmaza a tábla síkjában.

[8] Nekem azt kellett belátnom, hogy a valós számok halmaza nem állítható elő megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz uniójaként.

[9] Zárt intervallumon folytonos függvény mindig korlátos.

négy bizonyítását ismerte, én elmondtam neki egy ötödiket.

Ebéd után hétfőnként és szerdánként egy olyan óra következett, amelyen videofilmeket és cikkeket elemeztünk, és beszéltünk az iskoláról, nyelvekről, kirándulásainkról, a jövőnkről, mint ahogy ezt egy itthoni angolórán tesszük. Kedden és csütörtökön pedig a matematika olyan témáival foglalkoztunk, amikkel önállóan tudunk dolgozni, utánaolvasni, új dolgokat megismerni, bizonyítani, és azokat a többieknek előadni, mindezt magasabb matematikai előismeretek nélkül. Mivel nálam volt az itthoni füzetem, amit az elmúlt három évben vezettem, kerestem benne pár szép tételt, és azok bizonyítását mondtam el.[10]

Ezután jött az előző napi számelmélet feladatsor ellenőrzése, majd háromórás szabadidő, amikor általában sportoltunk. A legnépszerűbb a röplabda volt, bár néha kosárlabdáztunk is. Aztán rájöttem, miért szeretik jobban a röplabdát: jellegzetesen amerikai játék, hiszen nem az a stratégia, hogy mindenki a neki legjobban megfelelő helyen játszik, azaz a leggyengébbek a cserepadon, hanem folyamatosan cserélődnek a szerepek: mindenki egyenlő, ugyanúgy játszhat, mint bármelyik csapattársa.

Esténként dolgoztunk a kiosztott számelmélet feladatsoron, vagy analízisen. Mivel én mindkettőn részt vettem, nekem mindkettőt csinálnom kellett, ami szerencsére az itthon megszerzett gyakorlattal sikerült is. Néha pedig besegítettem a csapattársaimnak, hiszen a hangsúly végül is a csapatmunkán volt, és a saját magunk el(ő)adásán.

Rendszeresen jöttek hozzánk előadók, akik különböző témákról beszéltek. Így találkoztam például Dan Shapiroval, aki annak a tábornak az egyik vezető tanára, ahova jövőre szeretnék menni.[11] Órákon át beszélgettem vele geometriai problémákról és a táboráról. Előadást tartott még Susan Morey, szintén geometriáról. Lelkesen beszélt Évariste Galois (1811-1832) francia matematikus munkásságáról, aki fiatalon meghalt egy párbajban. Előző éjjel az egyik tételének bizonyítását írta le, hogy az megmaradjon az utókornak.[12] Susan Morey előadásában szó esett egyéb szerkeszthetőségi kérdésekről, és egy olyan problémáról, amire még egyetemista korából emlékszik, de a megoldását elfelejtette, és az akkori tanára sem emlékszik már rá. Az előadás után elmondtam neki egy megoldást.[13]

A tábort egy ünnepség zárta. Néhány jó szó kíséretében megkaptuk a díszoklevelet, majd órákon át szórakoztattuk egymást színdarabokkal, hangszeres zenével, énekkel, versekkel. Én két barátommal egy rövid történetet adtam elő, amelynek magyar változatára a KöMaLban bukkantam, és az eredeti angol szöveget hamar megtaláltam az interneten.[14]

Másnap elindultunk haza. A gépem késett, ezért Austinban kellett maradnom még egy napot. Következő reggel Terry, az analízistanár épp arra járt, így beugrott hozzám, és hosszasan beszélgettünk. Elmondtam neki a tavalyi fizikaverseny egyik példáját.[15] Rögtön fölmerült, hogy differenciálszámítással is megoldható lenne. Azzal váltunk el, hogy év közben dolgozunk rajta.

Ezek voltak az utolsó emlékeim Amerikáról. Útközben még összeakadtam néhány érdekes emberrel, mint ahogy ez a tábor alatt is gyakran megtörtént, de ahogy távolodtam a földrésztől, melyen hat hetet töltöttem el kellemesen, éreztem, hogy közeledem az Óhaza felé. Csak az vigasztalt, hogy tudtam, fogok én még matematikatáborba menni, és hogy az is biztos olyan jó lesz, mint amilyen ez volt.

---

[10] $2n$ csúcsú gráfban legalább n^2 él létezése esetén van háromszög (Turán-tétel); egy n csúcsú gráfban van Hamilton-kör, ha minden csúcs foka legalább $\frac{n}{2}$; van Hamilton-kör, ha több, mint $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ él van.

[11] Ohio State University: Ross Program http://www.math.ohio-state.edu/ross.

[12] Ez a tétel oldja meg a Déloszi kockakétszerezési problémát, a szögharmadolás kérdését, szabályos sokszögek szerkeszthetőségének és sokadfokú polinomok általános megoldóképletének kérdését.

[13] A feladat: kössünk össze két távoli pontot egy szakaszszal egy rövid körző és rövid vonalzó segítségével.

[14] Az irigy törpe és a bölcsesség köve (The Greedy Gnome and the Pearl of Wisdom):
http://komal.elte.hu/cikkek/egyeb/torpe.h.html
http://www.fazekas.hu/~bekyl/mathcamp/gnome.html.

[15] Mikola Sándor Fizikaverseny országos forduló 1998 Gyöngyös első osztályosok T (termodinamika) feladatsora 4. feladat: Két plexilap között egy téglalap négy csúcsát folyadékhártya köti össze. Milyen alakot vesz föl, ha a téglalap egyik oldala rögzített, a másikat pedig szabadon változtathatjuk? A feladatot kitűzésre javasolta Szegedi Ervin (Debrecen), aki a kísérletet Főzy István (ELTE) bemutatóján ismerte meg.

Dr. Papp Margit – dr. Ambrus András

Az integráció elve a matematika tanításában

A matematikatanítás legfontosabb általánosan képző céljai a következők:

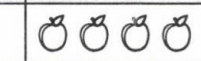
- Problémamegoldó képesség fejlesztése. (Ez magában foglalja a természet, a gyakorlati élet problémáinak megoldását is, azaz a matematikai modellalkotási képesség fejlesztését)
- Indoklási, következtetési, bizonyítási képesség fejlesztése.
- A matematikai ismeretek kommunikálása képességének fejlesztése.
- Matematikai kapcsolatok, összefüggések felismerésének, meglátásának képessége.

A fenti képességek fejlesztésében döntő szerepe van az ismeretek *reprezentációjának*. Ahhoz, hogy matematikai ismereteinket másokkal közöljük, külsőleg reprezentálni kell azokat. A külső reprezentációk fajtái: *tárgyi (materiális), képi (ikonikus, vizuális), szimbolikus (beszélt, illetve írott jelek).*

Ahhoz, hogy a matematikai fogalmakkal, elvekkel gondolati műveleteket végezhessünk, hogy gondolkodhassunk róluk, belsőleg is reprezentálni kell őket. A belső reprezentációkat *mentális reprezentációknak* is nevezzük. A kognitív pszichológiának két feltevése van a reprezentációkkal kapcsolatban.

1. A belső reprezentációk minőségére, fejlettségi állapotára a külső reprezentációk alapján következtethetünk.
2. A belső reprezentációk egy hálózatot alkotnak, ez a matematikai fogalmak, elvek kapcsolatát, összefüggéseit jelenti.

Példák

Fogalom	**Tárgyi reprezentáció**	**Képi reprezentáció**	**Szimbolikus reprezentáció**
Természetes szám	négy alma		4, IV, négy
Tört	egy valódi pizza háromnegyed része	rajz	3/4 0,75 háromnegyed
Függvény	Egy valódi szituáció: Tavirózsa a megfigyelés kezdetekor 1 négyzetmétert fed le. Hetenként megkétszereződik a lefedett terület	Grafikon	$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, t \to 2^t$
Eltolás	Egy konkrét tárgy eltolása adott irányban adott távolságra	Egy adott alakzat eltolt képének megszerkesztése	Eltolás T_v

Néhány didaktikai megjegyzés a reprezentációkkal kapcsolatban

1. A külső reprezentációk közül a szimbolikus fejezi ki legtömörebben és legabsztraktabban az adott elvet, fogalmat. Viszont a tárgyi és képi reprezentációk segítségével a tanulók jobban megértik a fogalom, elv lényegét, jelentőségét, értelmes lesz számukra (sensemaking). Az emberek jobban emlékeznek egy fogalom vizuális aspektusaira, mint az analitikus szempontokra. Slomo Winner izraeli matematikadidaktikus szerint az emlékezet jobban tud operálni képekkel mint szavakkal. Természetesen szükség van analitikus szempontokra is, a neurobiológia ugyanis az agy egységes szerkezete mellett foglal állást, megkérdőjelezve a jobb és bal agyfélteke munkamegosztásáról szóló lokalizációs elméletet. Sikeresebb a tanulási folyamat, ha különböző kognitív módszerekre támaszkodik, ha integrálja a verbális, elemző és vizuális tevékenységeket.

2. A hagyományos didaktikai felfogás szerint a vizuális és főként a tárgyi reprezetációknak az alsóbb osztályokban van jelentősége, a felsőbb osztályokban a szimbolikus reprezentációknak kell dominálniuk. Tapasztalataink szerint a magyar matematikaoktatásban sajnálatos eltolódás tapasztalható a szimbolikus reprezentációk felé már az alsóbb osztályokban, esetenként az alsó tagozaton is. A nemzetközi matematikadidaktikai szakirodalomban erősödik az a felfogás, hogy a vizuális reprezentációkat a felsőbb osztályokban, sőt a felsőfokú oktatásban is alkalmazni kell, ezzel is segítve a megértést.

3. Már Arisztotelész is hirdette, hogy az egész több mint a részek összege. Az *alakelmélet tanuláspszichológiai irányzat (Gestaltizmus)* képviselői szerint az *egész*, az *alak* több ismeretet tartalmaz, mint a részek mechanikus összessége. *Az egésznek, az integrált struktúráknak* az észrevétele fontos a problémamegoldás során is, gondoljunk az ún. *„Aha!"* élményekre. Pólya György is az alakelmélet képviselője volt. A vizuális reprezentáció gyakran segít egy probléma felfogásában, megértésében.

4. A problémamegoldás kutatói szerint a tanulók két csoportba oszthatók a feladatmegoldás során mutatott viselkedésük alapján. Az egyik csoport képviselői különösebb mérlegelés, megfontolás nélkül a feladatokban szereplő számadatokra koncentrálnak, és azokkal valamilyen műveletet végeznek el. Betanult „kulcsszavak" alapján viselkednek. A másik csoport tagjai megpróbálják a problémaszituációt elképzelni, gyakran használnak vizuális reprezentációt, mellyel a feladatban szereplő mennyiségek közötti relációt is jól ki tudják fejezni.

A jó problémamegoldók a problémához legjobban illő reprezentációt választják, rugalmasan áttérnek sok esetben algebrai feladatoknál a geometriai reprezentációkra.

A következőkben néhány feladatot mutatunk be a fentiek illusztrálására. Az egyes témakörök tanítása során a tanulók hajlamosak arra, hogy az ott tanult eljárásokat kizárólagosan alkalmazzák, nem gondolva más lehetőségekre. Ezért is tartjuk szükségesnek olyan esetek bemutatását, amikor is más szemszögből is nézzük az adott problémát. A matematikán belüli integrációnak tulajdonképpen ez a lényege, azaz a különféle területek összekapcsolása, egyik reprezentációról a másikra való rugalmas átjárás. Egy feladat többféle megoldásának összehasonlítása lehetővé teszi a megoldási módszerek elemző összehasonlítását.

Az analízis módszerei az algebrában

A differenciál- és integrálszámítás segítségével elegánsan lehet igazolni ismert azonosságokat. A módszer a következő tételen alapszik:

1. tétel. Legyen $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ két függvény.

a) Ha f és g deriválhatók az intervallumon és $f(x) = g(x) \quad \forall x \in I$, akkor $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$.

b) Ha f és g integrálható az $[\alpha, \beta] \subseteq I$ intervallumon és $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, akkor $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

1. Igazoljuk hogy:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

b) $1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

c) $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

$n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

Bizonyítás

a) Tekintsük az $f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+$ $+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n=g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ függvényt!

A fenti tétel alapján: $f'(x)=n(1+x)^{n-1}=$ $=C_n^1+2C_n^2x+\ldots+nC_n^nx^{n-1}=g'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, ahonnan $x=1$-re

$$C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}.$$

b) Ha az $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+\ldots+$ $+nC_n^nx^{n-1}$ azonosság mindkét oldalát megszorozzuk x-szel az $n(1+x)^{n-1}\cdot x=$ $=C_n^1x+2C_n^2x^2+\ldots+nC_n^nx^n$ azonossághoz jutunk. Tekintsük mindkét oldal deriváltját:

$$n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=$$
$$=C_n^1+2^2C_n^2x+3^2C_n^3x^2+\ldots+n^2C_n^nx^{n-1}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}.$$

Innen $x=1$-re kapjuk, hogy

$$C_n^1+2^2C_n^2+3^2C_n^3+\ldots+n^2C_n^n=$$
$$=n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}.$$

c) Kiindulunk az $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+$ $+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$ azonosságból és tekintjük mindkét oldalnak a [0, 1]-on a határozott integrálját.

$$\int_0^1(1+x)^n\mathrm{d}x=$$
$$=\int_0^1(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)\mathrm{d}x,$$

ahonnan

$$\left(C_n^0x+\frac{1}{2}C_n^1x^2+\frac{1}{3}C_n^2x^3+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^nx^n\right)\Big|_0^1=$$
$$=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1,$$

azaz:

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=$$
$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\quad n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

Az 1. tétel *a)* pontjának a fordítottja:

2. tétel. Ha f és g egy I intervallumon deriválható függvények, és deriváltjaik egyenlőek, akkor különbségük állandó a tekintett intervallumon.

Ez a tétel a következő feladathoz hasonló feladatoknál bizonyul hasznosnak.

2. Igazoljuk, hogy $h(x)=\mathrm{arctg}x-\mathrm{arcctg}1/x$ konstans, ha x pozitív szám. Határozzuk meg a konstans értékét!

Bizonyítás. Legyen $f(x)=\mathrm{arctg}x$ és $g(x)=$ $=\mathrm{arcctg}1/x$, $x\in(0,+\infty)$. Ekkor

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ g'(x)=\frac{-1}{1+(1/x)^2}\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

tehát $f'(x)=g'(x)$ $\forall x\in(0,+\infty)$.

A 2. tétel alapján a $h(x)=f(x)-g(x)$ konstans. A konstans értékét úgy határozhatjuk meg, hogy választunk egy tetszőleges számot az adott intervallumról és, abban kiszámítjuk a függvény értékét. Lehetőleg olyat választunk, amelyben a függvény értékét könnyen ki tudjuk számítani. A mi feladatunk esetében például ilyen $x=1$ helyre

$$h(1)=\mathrm{arctg}1-\mathrm{arcctg}1/1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0.$$

Következésképpen $h(x)=0$ minden pozitív szám esetén.

Megjegyzés. A 2. tételben az, hogy az I tartomány intervallum, lényeges feltétel.

Ha az f és g függvények deriváltjai olyan E halmazon egyenlők, amely például közös pont nélküli két intervallum egyesítése, akkor az $f-g$ különbségről nem állíthatjuk, hogy ugyanazzal a konstanssal egyenlő mindkét intervallumon.

Példa erre a fent tekintett f és g függvény, mivel deriváltjaik egyenlőek a negatív számok halmazán is, de

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=$$
$$=\mathrm{arctg}(-1)-\mathrm{arcctg}(-1/1)=-\frac{\pi}{4}-(-\frac{3\pi}{4})=-\pi.$$

Következésképpen az előzőhöz hasonlóan az következik, hogy $h(x)=-\pi$ $\forall x\in(-\infty,0)$.

Szintén deriváltak segítségével könnyedén tudunk igazolni olyan egyenlőtlenségeket, amelyeket elemi úton nehézkesen, vagy egyáltalán nem lehet igazolni.

3. Igazoljuk, hogy $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$, $\forall x > 0$!

Bizonyítás. Elegendő belátnunk, hogy

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0, \quad \forall x > 0.$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} =$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)} = \frac{-x}{(1+x)^2} < 0 \quad \forall x > 0.$$

Tehát f csökkenő függvény, $f(0) = 0$, ahonnan következik, hogy $f(x) < f(0) = 0$, ha $x > 0$.

4. Milyen a esetén van megoldása a $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$ *egyenletnek?*

Megoldás. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x}$ függvényt, amely a $2 \le x \le 4$ intervallumon van értelmezve. Ezen az intervallumon az f függvény folytonos és differenciálható. Képezzük az f függvény deriváltfüggvényét!

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{2}{2\sqrt{8-2x}}$$

A deriváltfüggvény zérushelye $x = \frac{8}{3}$.

	$2 \le x \le 8/3$	$x = 8/3$	$8/3 \le x \le 4$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	szigorúan monoton nő	maximumhely	szigorúan monoton fogy

A maximum értéke $\sqrt{6}$. A függvény értéke az intervallum végpontjaiban $f(2) = 2$, $f(4) = \sqrt{2}$. A fentiek alapján $\sqrt{2} \le a \le \sqrt{6}$ esetén van megoldása egyenletünknek.

A differenciálszámítás alkalmazása a trigonometriában

1. Igazolja a következő azonosságot

$$\cos^4 x - \frac{1}{2}\cos 4x = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}!$$

Megoldás

Tekintsük az $f(x) = \cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x$ és a $g(x) = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}$ függvényeket! Képezzük az f, illetve g függvények deriváltfüggvényeit! Mindkét függvény folytonos és differenciálható minden valós számra.

$$f'(x) = -4\cos^3 x \cdot \sin x + \frac{1}{2}\sin 4x$$

$$g'(x) = -4\cos x \cdot \sin x + \sin 2x =$$
$$= -2\sin 2x + \sin 2x = -\sin 2x$$

$$f'(x) = -4\cos^3 x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos 2x =$$
$$= -2\sin 2x \cdot \cos^2 x + \sin 2x \cdot \cos 2x =$$
$$= -\sin 2x(2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x) = -\sin 2x$$

Mivel a két függvény deriváltfüggvénye megegyezik, a két függvény csak konstansban tér el egymástól. E konstanst egy konkrét helyen pl. $x = 0$-nál fölvett függvényérték adja.

$$f(x) - g(x) = C$$
$$f(0) = 7/8, \quad g(0) = 7/8$$

Tehát $f(x) = g(x)$, azaz teljesül az azonosság.

2. Bizonyítsa be, hogy $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, *ha* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$!

Megoldás

Egyenlőtlenségünk ekvivalens a $\sin x + \operatorname{tg} x - 2x > 0$ egyenlőtlenséggel. Ezen egyenlőtlenség függvénytanilag azt jelenti, hogy ha $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$ függvény értéke 0-nál 0 és az adott intervallumban a függvény szigorúan monoton nő, akkor teljesül az egyenlőtlenség.

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

A kérdéses intervallumban teljesül

$$\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

hiszen ezen intervallumban teljesül

$$\cos x > \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} > 2$$

teljesül az ismert egyenlőtlenség alapján, hiszen $a + \frac{1}{a} \ge 2$, de esetünkben a cosinus értéke nem lehet 1, így kizárhatjuk az egyenlőséget.

Differenciálszámítás alkalmazása a sorozatoknál

Feladat: Határozzuk meg a következő összeget!

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{100}{2^{100}}$$

Megoldás

Tekintsük az $f(x)=x+x^2+x^3+\ldots+x^{100}$ és $x\in(0,1)$ függvényt! Függvényünk folytonos és differenciálható a megadott intervallumban.

$$f'(x)=1+2x+3x^2+\ldots+100x^{99}$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{100}{2^{99}}=2S$$

$f(x)$ kifejezhető a mértani sorozat összegképlete alapján is:

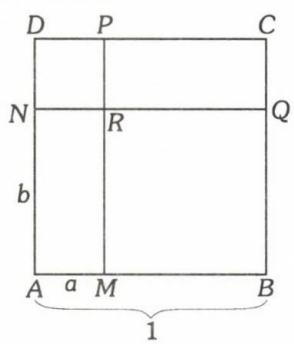
$$f(x)=\frac{x^{101}-x}{x-1}$$
$$f'(x)=\frac{(101x^{100}-1)(x-1)-(x^{101}-x)}{(x-1)^2}$$

x helyébe 1/2 értéket helyettesítve megkapjuk a kérdéses összeg kétszeresét. Végül is S-re $2-\frac{51}{2^{99}}$ értéket kapjuk.

Algebrai feladatok geometriai megoldása

1. Igazoljuk, hogy ha $0<a<1$, $0<b<1$, akkor $a+b-2ab<1$!

Bizonyítás. Tekintsük az 1 egység oldalú $ABCD$ négyzetet (1. ábra). Az AB illetve AD oldalaira mérjük fel az $AM=a$ és $AN=b$ hosszúságú szakaszokat. Ekkor az $ABQN$ téglalap területe b, a $DPMA$ területe a, az $NAMR$ téglalap területe $a\cdot b$. Így $a+b-2ab=T_{MADP}+T_{NABQ}-2T_{ANRM}=T_{DNRP}+T_{RMBQ}<T_{ABCD}=1$, amit bizonyítani akartunk.



1. ábra

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges x, y, z pozitív számok esetén:

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{z^2-yz+y^2}\geq\sqrt{x^2+xz+z^2}$$

Bizonyítás. Ha algebrai úton próbálkozunk az egyenlőtlenség bizonyításával, akkor ekvivalens átalakítások segítségével próbálnánk az adott egyenlőtlenségből egy olyan egyszerűbb egyenlőtlenséghez jutni, amely az eredetivel egyenértékű, és azonnal belátható, hogy igaz bármely x, y, z pozitív számra.

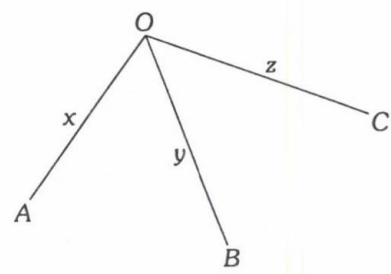
A fenti egyenlőtlenség esetében mindkét oldal négyzetre emelése után kapott egyenlőtlenség az eredetinél nem sokkal egyszerűbb, még gyökmennyiséget is tartalmaz.

$$x^2-xy+y^2+2\sqrt{(x^2-xy+y^2)(z^2-zy+y^2)}+$$
$$+z^2-zy+y^2\geq x^2+xz+z^2,$$

Ilyen helyzetben egy 'jó matematikus' nem szívesen viszi tovább a bonyolult számításokat, hanem valami egyszerűbb megoldást keres.

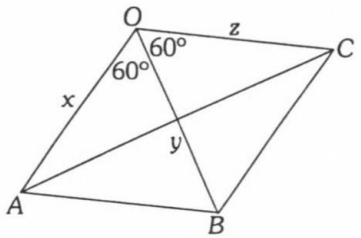
Ésszerű megoldás. Mivel x, y, z pozitív valós számok, ezért tekintsük rendre az $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ szakaszokat. (2. ábra). A rajz alapján észrevesszük, hogy $AB^2=x^2+y^2-2xy\cos AOB$. Hogyan válasszuk meg az AOB szöget úgy, hogy $AB^2=x^2+y^2-xy$?

Legyen AOB szög 60 fokos, ekkor $\cos AOB=1/2$, tehát és $AB^2=x^2+y^2-xy$ és $AB=\sqrt{x^2+y^2-xy}$. Hasonlóan, legyen BOC szög 60°-os (3. ábra), ekkor $CB=\sqrt{y^2+z^2-zy}$. Az AC pedig $AC=\sqrt{x^2+z^2-2xz\cos 120^\circ}=\sqrt{x^2+z^2+xz}$.



2. ábra

Így a feladatban szereplő egyenlőtlenség egyenértékű az $AB + BC \geq AC$-vel, amely bármely háromszögben igaz.



3. ábra

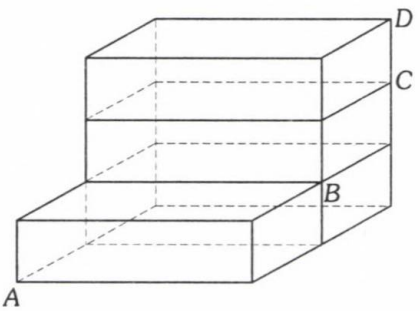
3. Igazoljuk, hogy ha a, b, c > 0, akkor

$$\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c}>\sqrt{a+4b+9c}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a 4. ábrán látható egybevágó téglatesteket, melyeknek élméretei rendre $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$. (A-ból kiindulva a két vízszintes él, majd a függőleges él.)

Ekkor $AB = \sqrt{a+b+c}$, $BC = \sqrt{b+c}$, $AD = \sqrt{a+4b+9c}$.

Mivel $AB + BC + CD > AD$ (bármely két pontot összekötő törött vonal hossza nagyobb, mint a két pontot összekötő szakasz hossza) következik, hogy 3-as feladat állítása igaz.



4. ábra

4. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\geq\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^2},$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i=\overline{1,n}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az zOy koordinátarendszert és benne az $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, ..., $A_n(a_1 + a_2 + ... + a_n,\ b_1 + b_2 + ... + b_n)$ pontokat. Ekkor:

$$OA_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2},\quad A_1A_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2},$$
$$A_2A_3=\sqrt{a_3^2+b_3^2},\ldots,A_{n-1}A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$
$$OA_n=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}.$$

Mivel két pontot összekötő legrövidebb út az egyenes szakasz hossza (az euklideszi geometriában), ezért: $OA_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n \geq OA_n$, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\geq\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^2},$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i=\overline{1,n}.$$

5. Adottak a z_1, z_2, z_3 komplex számok úgy, hogy $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ és $z_2 \neq z_3$. Határozzuk meg:

$$\min_{t\in\mathbb{R}}|z_1-tz_2-(1-t)z_3|$$

Megoldás. Az algebrai úton történő megoldáskeresés teljesen reménytelen. Ezért vagy trigonometrikus vagy geometriai úton próbálkozhatunk. Azonban a trigonometrikus út sem tűnik egyszerűnek, hiszen ekkor

$$z_1 = r(\cos\alpha_1 + i\cdot\sin\alpha_1)$$
$$z_2 = r(\cos\alpha_2 + i\cdot\sin\alpha_2)$$
$$z_3 = r(\cos\alpha_3 + i\cdot\sin\alpha_3)$$

és az

$$r[\cos\alpha_1 - t\cdot\cos\alpha_2 - (1-t)\cos\alpha_3 + i\cdot(\sin\alpha_1 - t\cdot\sin\alpha_2 - (1-t)\sin\alpha_3)]$$

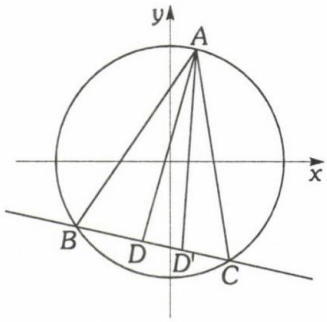
kifejezés minimumát kell keresni (t egy valós számot jelent). Hátramaradt tehát a megoldás geometriai úton való keresése. Mivel $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$, ezért a z_1, z_2, z_3 komplex számok A, B, C képei az $O(0, 0)$ középpontú r sugarú körön vannak. A $z = tz_2 + (1 - t)z_3$, $t \in \mathbb{R}$ egy olyan komplex szám, amelynek képe a BC egyenesen van. Legyen z képe a D pont (5. ábra).

Az $|z_1 - (tz_2 + (1 - t)z_3| = |z_1 - z|$ pedig az AD távolságot jelöli.

Tehát ily módon a feladatot a következőképpen fogalmaztuk át: Határozzuk meg a BC

egyenes azon D pontját, amelyre az AD távolság minimális. Erre a geometriai feladatra a válasz azonnali, mivel az AD távolság akkor minimális, ha $AD \perp BC$, azaz $\min|z_1 - z| = AD'$, ahol AD' az ABC háromszög A csúcshoz tartozó magassága.

$$\min|z_1 - z| = AD' = \frac{T_{ABC}}{BC} = \frac{\frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4r}}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{4r} = \frac{1}{4r}|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|.$$



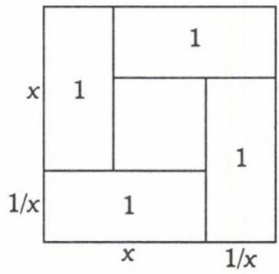
5. ábra

A következő feladat jól ismert, egyszerű egyenlőtlenség. Mégis célszerűnek tartjuk négy megoldás bemutatását abból a célból, hogy demonstrálhassuk, milyen sokféle lehet ugyanazon algebrai koncepció geometriai reprezentációja. Különösen az utolsó variáns sok geometriai ismeret aktivizálását kívánja meg. A többféle megoldás összehasonlítása jó lehetőséget biztosít a különböző módszerek értékelésére, hatékonyságának vizsgálatára.

6. Igazoljuk, hogy bármely pozitív x valós számra teljesül $x + \frac{1}{x} \geq 2$!

A megoldások során többnyire csak az 1-nél nagyobb x-ekre vizsgáljuk az egyenlőtlenséget, kihasználva azt, hogy minden 1-nél kisebb pozitív valós számnak 1-nél nagyobb a reciproka és viszont, a szóban forgó összeg tehát ugyanaz lesz például $x = 3$-ra illetve $x = 1/3$-ra.
A bizonyítandó állítást több esetben áttranszformáljuk egy vele ekvivalens állításba és azt igazoljuk.
Az $x = 1$ esetet gyakran külön vizsgáljuk mint speciális esetet, melyre az összeg 2.

1. Megoldás

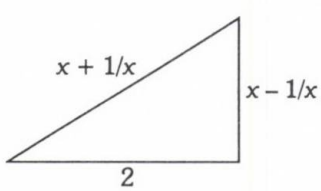


6. ábra

Az ábrán négy egybevágó téglalap van rendre x és $1/x$ oldalakkal. A konstrukcióból következik, hogy a teljes ábra egy négyzet lesz, amelynek belsejében egy kis négyzet keletkezik. A nagy négyzet területe tehát nagyobb mint 4 egység, ha x nem 1, amiből következik, hogy oldala – $x + 1/x$ – nagyobb mint 2 egység. $x = 1$ esetén nincs belső négyzet, az összeg 2 lesz.

2. Tekintsük az $x \mapsto 1/x$ és $x \mapsto 2 - x$ függvényeket pozitív x-ekre. Ezen tartományon a két függvény grafikonjának egyetlen közös pontja van, ekkor $x = 1$. A lineáris függvény grafikonja e pont kivételével a hiperbola alatt helyezkedik el. Az egy közös pont létezését algebrailag is tudjuk igazolni a $2 - x = 1/x$ egyenlet megoldásával. Ezekből következik az egyenlőtlenségünk igaz volta, hiszen az $1/x \geq 2 - x$ egyenlőtlenség ekvivalens az eredeti egyenlőtlenséggel.

3. Tekintsük a 2, $x - 1/x$ és $x + 1/x$ oldalakkal rendelkező háromszöget. Pitagorasz-tétel megfordítása alapján e háromszög derékszögű, melynek átfogója $x + 1/x$ lesz. Ebből következik, hogy hosszabb a befogónál, azaz $x + 1/x > 2$ teljesül.

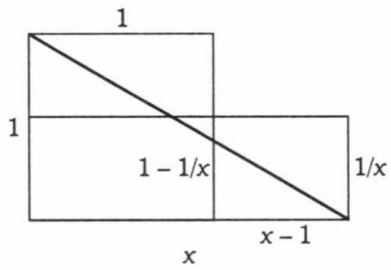


7. ábra

4. Tekintsük a következő, az eredeti egyenlőtlenséggel ekvivalens alakot:

$$x - 1 \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

Párhuzamos szelők tétele alapján az ábra jobb alsó sarkában elhelyezkedő derékszögű háromszög befogói $x - 1$, illetve $1 - 1/x$. Az egységoldalú négyzet átlójához viszonyítva a kis derékszögű háromszög átfogójának egyenese a függőlegessel 45°-nál nagyobb szöget zár be, azaz a vele szemközti befogó $x - 1$ nagyobb, mint a másik befogó $1 - 1/x$.



8. ábra

Algebrai egyenlet megoldása trigonometrikus úton

Oldjuk meg a $8x \cdot (2x^2 - 1) \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ *egyenletet a [–1, 1] halmazon!*

Megoldás. Jelöljük x-et $\cos\alpha$-val. Ekkor

$$2x^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha.$$
$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 2(4x^4 - 4x^2 + 1) - 1 =$$
$$= 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \cos 4\alpha.$$

Így a fenti egyenlet a $8\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1$ alakú trigonometrikus egyenlettel egyenértékű, amelynek mindkét oldalát szorozva $\sin\alpha$-val a következőt kapjuk:

$$8\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow$$
$$4\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow$$
$$2\sin 4\alpha \cos 4\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin 8\alpha = \sin\alpha,$$

ahonnan:

$$8\alpha = \alpha + 2k\pi, \quad \alpha = \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

vagy

$$8\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

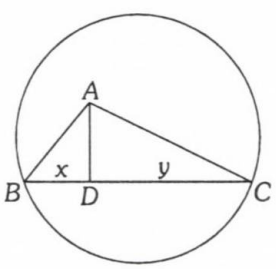
a kapott szögek koszinuszai lesznek az eredeti egyenlet megoldásai.

Ismeretes, hogy nagyon sok geometria feladat megoldható trigonometrikus úton. Ilyen feladatok például az általános háromszög elemeinek meghatározása, ha ismert a háromszög két szöge és egy oldala. Ritkábban, de alkalmazni szoktuk a geometriai utat is a trigonometria feladatok megoldására.

Geometriai úton megoldható trigonometriai egyenlőtlenség

7. Ha $x, y > 0$ *és* $x + y < \frac{\pi}{2}$ *igazoljuk, hogy* $\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y > 2$.

Bizonyítás. Mivel $x, y > 0$ és $x + y < \frac{\pi}{2}$, ezért x és y szögeket úgy tekinthetjük, mint egy tompaszögű háromszög hegyesszögeit. Legyen BAC egy olyan tompaszögű háromszög, amelyben a B szög mértéke x, a C szögé pedig y (9. ábra). Legyen továbbá $AD \perp BC$, és rajzoljuk meg a BC átmérőjű kört. Mivel az A szög tompaszög, ezért A a BC átmérőjű kör belsejében lesz. $\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = \frac{BD}{DA} + \frac{CD}{DA} = \frac{BC}{DA}$. Mivel az A a BC átmérőjű kör belsejében van, ezért $AD < \frac{BC}{2}$, tehát $\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = \frac{BC}{DA} > \frac{BC}{\frac{BC}{2}} = 2$.



9. ábra

Irodalom

[1] Ambrus, A. (1995) Bevezetés a matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó Budapest

HÍREK VERSENYEKRŐL

Dr. Kántor Sándorné

A Hajdú-Bihar megyei Matematikai Versenyről

1975-1987 között a Bolyai János Matematikai Társulat Hajdú-Bihar megyei Tagozata és a Megyei Művelődés és Oktatási Osztály támogatásával évente megrendezésre került a Hajdú-Bihar megyei Matematikai Verseny, amelyen a megye középiskolásai vettek részt. 10 éves kihagyás után sikerült a versenyt a KLTE Matematikai és Informatikai Intézete és a Felsőoktatási Programfinanszírozási Pályázat tehetséggondozó programja keretében (vezetője dr. Lajkó Károly) felélesztení. Az 1999/2000. tanévben 1999. november 18-án rendeztük meg a megye összes középiskolája (gimnázium, szakközépiskola) 9-12 évfolyamos tanulói számára a versenyt, amelyen közel 1000 tanuló írt versenydolgozatot.

A versenyfeladatokat a KLTE oktatói állították össze (9. évfolyam: dr. Kántor Sándor, 10. évfolyam: dr. Kovács András 11. évfolyam: dr. Páles Zsolt, 12. évfolyam: dr. Kántor Sándorné). A versenybizottság vezetője dr. Kántor Sándorné volt. Mindegyik évfolyamon 5 feladatot kaptak a tanulók, amelyek kidolgozására 2 órát fordíthattak. Egy-egy feladatsor összpontértéke 60 pont volt.

A verseny igen eredményes volt. 29 tanár 48 diákja ért el helyezést, kapott dicséretet. Maximális pontszámot 7-en értek el (Csóka Endre, Nagy Tibor, Siroki László, Varga Éva, Csige Sándor, Csillag Kristóf, Patay Gergely).

A verseny eredményei:
(A rövidítések jelentése: FMG: Fazekas Mihály Gimnázium, TÁG: Tóth Árpád Gimnázium)

9. évfolyam

1. Csóka Endre, FMG, Debrecen
   Nagy Tibor, FMG, Debrecen
2. Nagy András, FMG, Debrecen
   Nagy Erika, Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen
3. Lakatos Kristóf, KLTE Gyak. Gimn., Debrecen
   Krusper Balázs, TÁG, Debrecen
   Hofgárt Gergely, Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló
   Hajdú Gábor, Mechwart A. Szakközépiskola, Debrecen

Dicséret: Kormos Attila (FMG), Nyul Balázs (FMG), Dombi Nóra (TÁG).

10. évfolyam

1. Siroki László, FMG, Debrecen
   Timár Gábor, FMG, Debrecen
2. Kovács Zoltán, TÁG, Debrecen
   Erdei Zsuzsa, Hőgyes E. Gimnázium, Hajdúszoboszló
   Tóth Ágnes, Hőgyes E. Gimnázium, Hajdúszoboszló
   Guta Balázs, Ady E. Gimnázium, Debrecen
3. Szakácsi János, FMG, Debrecen
   Pajna Gabriella, TÁG, Debrecen
   Szaszkó Viktor, Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen
   Gál Zoltán, Gábor D. Szakközépiskola, Debrecen
   Varga Balázs, Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen
   Hajdú János, Mechwart A. Szakközépiskola, Debrecen

Dicséret: Borosi Aranka (Svetits Gimn.), Dombi Tímea (TÁG), Csirmaz Viktor (Hőgyes E. Gimn.)

11. évfolyam

1. Varga Éva, TÁG, Debrecen
2. Csató György, Hőgyes E. Gimnázium, Hajdúszoboszló
   Patalenszki Attila, Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen
3. Nagy Dávid, FMG, Debrecen
   Vona Gábor, FMG, Debrecen
   Zajdó Csaba, TÁG, Debrecen
   Szilasi Zoltán, KLTE Gyak. Gimn., Debrecen

Dicséret: Parádi Gábor (TÁG), Illés Péter (TÁG), Sajtos Erika (Ref. Koll. Gimn.).

12. évfolyam

1. Csige Sándor, KLTE Gyak. Gimn., Debrecen
   Csillag Kristóf, Karacs F. Gimn., Püspökladány
   Patay Gergely, TÁG, Debrecen
2. Fábián Ákos, KLTE. Gyak. Gimn., Debrecen
   Nagy István, KLTE Gyak. Gimn., Debrecen
   Oláh Gusztáv, Mechwart A. Szakközépiskola, Debrecen
3. Vadkerti József, KLTE Gyak. Gimn., Debrecen
   Kiss Norbert, FMG, Debrecen
   Buday Tamás, TÁG, Debrecen
   Lakatos Norbert, Bethlen G. Szakközépiskola, Debrecen

Dicséret: Szilágyi Csaba (TÁG), Gunda Lénárd (KLTE Gyak. Gimn.)

A versenyen kitűzött feladatok:

9. évfolyam

1. Mennyi ebben az évszázadban (1901-gyel kezdve és 2000-rel bezárva) az évszámok számjegyeinek az összege?

10 pont

2. Három gyerek: A, B, C úgy osztozik egy tortán, hogy egymás után elveszik a maradék egy részét: A elveszi a torta egynegyedét, B a maradék egyharmadát, C a maradék felét. Ezután újra A következik: elveszi a maradék felét, B annak a felét, ami még megmaradt, és C azt viszi el, ami ezután még megmaradt. Ki mennyi részt kapott a tortából?

10 pont

3. Mely $n > 1$ természetes számra igaz, hogy $n^3 - n$ osztható 24-gyel?

11 pont

4. Egy derékszögű háromszög köré írható körének sugara R, beírt körének sugara r. Mennyi a háromszög területe?

12 pont

5. Egy téglatest egyik csúcsából induló éleinek hossza a, b, c. A téglatest térfogata 60. Tudjuk, hogy

$$3 \le a \le 4, \quad 4 \le b \le 6.$$

Van-e ezeket a feltételeket teljesítő rindegyik a, b, c számhármas esetén olyan háromszög, amelyik oldalainak hossza a, b, c?

17 pont

10. évfolyam

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható az

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10;
11; 12; 13; 14; 15

számok mindegyikével?

8 pont

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$||x|-2| = 1$$

egyenletet!

10 pont

3. Jóska órájának leesett a kismutatója. Sebaj – gondolja – napjában néhányszor, amikor a nagymutató eltakarja a kicsit, a többi órán is ugyanezt lehet látni. Hányszor fordul elő ez az eset egy „jó" órával egy nap alatt, és mely időpontokban?

12 pont

4. Egy paralelogrammába rajzoljunk egy másik paralelogrammát. A két paralelogrammának a középpontja vajon minden esetben egybeesik? (Egy paralelogramma akkor van egy másikba rajzolva, ha a beraj-

zolt alakzat csúcspontjai a másik paralelogramma különböző oldalain találhatók.)

14 pont

5. Pista a

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}=\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$$

egyenlet megoldására az $x=2$ gyököt kapta. Győződjünk meg arról, hogy az $x=2$ valóban gyök-e, és vizsgáljuk meg, nincs-e más gyöke az egyenletnek!

16 pont

11. évfolyam

1. Állapítsuk meg, hogy 20!-nak a 6-os számrendszerbeli alakja hány nullára végződik ($20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$).

10 pont

2. Oldjuk meg a

$$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2+12x+36}=$$
$$=\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{x^2+10x+25}$$

egyenletet a valós számok halmazán.

11 pont

3. Oldjuk meg a

$$(\log_{\sin x}\sin 2x)(\log_{\sin 2x}\sin 3x)(\log_{\sin 3x}\sin 4x)=1$$

egyenletet a $0<x<\frac{\pi}{4}$ intervallumon.

12 pont

4. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha ismerjük BC hosszát, valamint az $ASB\sphericalangle$ és az $ASC\sphericalangle$ szögek értékét, ahol S a háromszög súlypontja.

13 pont

5. Legyen egy $ABCD$ négyzet alapú szabályos gúla csúcsa E. Tegyük fel, hogy $AEB\sphericalangle = 30°$. Legyenek P, Q, R rendre a BE, CE, DE élek olyan belső pontjai, amelyekre az $APQRA$ töröttvonal hossza minimális. Igazoljuk, hogy ekkor Q a CE él felezőpontja.

14 pont

12. évfolyam

1. Az a_1 és a_2 valós számokból kiindulva képezzük az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$$

sorozatot úgy, hogy

$$a_3 = a_2 - a_1,\ a_4 = a_3 - a_2, \ldots,$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \ldots \ (n \in \mathbb{N}^+)$$

Számoljuk ki a sorozat első 2004 tagjának összegét!

10 pont

2. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és érinti az $x - y = -1$ egyenletű egyenest is!

10 pont

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$8\sqrt{1-2^x+2^{2x-2}} > 2^{2x}-2^{x+2}+7.$$

12 pont

4. Legyen P az a oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet köré írható körnek, Q pedig a négyzetbe írható körnek egy tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$3(d_{PA}^2+d_{PB}^2+d_{PC}^2+d_{PD}^2)=$$
$$=4(d_{QA}^2+d_{QB}^2+d_{QC}^2+d_{QD}^2).$$

14 pont

5. Négy gömb alakú golyó fekszik egy asztallapon úgy, hogy mindegyik golyó érinti az asztallapot és a másik három golyót. A négy golyó közül három sugarának a hossza R. Határozzuk meg a negyedik golyó sugarának a hosszát!

14 pont

Néhány feladat megoldásának bemutatása

9. évfolyam

5. Pontosan akkor van ilyen háromszög, ha $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$. $c=\frac{60}{ab}$, ezért $\frac{60}{4\cdot 6}=2{,}5\le c\le\frac{60}{3\cdot 4}=5$.

Így $a + b \geq 3 + 4 > 5 \geq c$ és $b + c \geq 4 + 2{,}5 > 4 \geq a$, tehát az első két feltétel teljesül.

Azt, hogy $a + c > b$ is mindig teljesül, három eset vizsgálatával bizonyítjuk:

I. $3 \leq a \leq 3{,}3$ esetén $3 < \frac{60}{6 \cdot 3{,}3} \leq c$ miatt $a + c > 6 \geq b$.

II. $3{,}3 < a < 3{,}6$ esetén $2{,}7 < \frac{60}{6 \cdot 3{,}6} \leq c$ miatt $a + c > 3{,}3 + 2{,}7 = 6 \geq b$.

III. $3{,}6 \leq a \leq 4$ esetén $2{,}7 < \frac{60}{6 \cdot 4} = 2{,}5 \leq c$ miatt $a + c > 3{,}6 + 2{,}5 > 6 \geq b$.

10. évfolyam

4. Tükrözzük a paralelogrammákat a berajzolt paralelogramma középpontjára!

Mivel a paralelogramma középpontosan szimmetrikus, így a berajzolt paralelogramma képe önmaga.

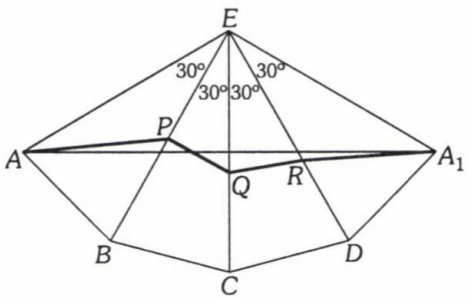
A tükrözés párhuzamos egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz át, ezért a másik paralelogramma oldalegyeneseinek tükörképei olyan egyenesek lesznek, amelyek párhuzamosak az eredetiekkel, és a beírt paralelogramma szemközti csúcsain haladnak át. Mivel erre a pontra éppen a tükrözöttel párhuzamos paralelogrammaoldal illeszkedik, így az eredeti paralelogramma egy oldalegyenese a paralelogramma (szemközti) oldalegyenesébe megy át.

Ez pontosan azt jelenti, hogy az eredeti paralelogramma képe a beírt paralelogramma középpontjára nézve önmaga, tehát a beírt paralelogramma középpontja a másik paralelogrammának is a középpontja, mert egy paralelogrammának pontosan egy középpontja lesz.

11. évfolyam

5. Vágjuk fel a gúla palástját az AE szakasz mentén, és terítsük ki a síkba (1. ábra)!

Mivel $AEB\sphericalangle = BEC\sphericalangle = CED\sphericalangle = DEA_1\sphericalangle = 30°$ és $d_{AE} = d_{CE} = d_{A_1E}$, ezért AEC és CEA_1 szabályos háromszög. A térbeli $APQRA$ töröttvonal akkor lesz minimális, ha a síkbeli $APQRA_1$ töröttvonal is az, azaz ha egybeesik az AA_1 szakasszal. Ekkor Q az AEA_1C rombusz két átlójának metszéspontja, tehát felezi EC-t.



1. ábra

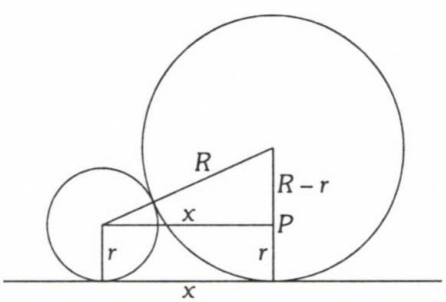
12. évfolyam

5. Mivel a négy golyó érinti az asztallapot, ez csak úgy lehetséges, hogy $r < R$.

Nyilvánvaló a szimmetria alapján, hogy az R sugarú golyók középpontjai szabályos háromszöget alkotnak, amelynek súlypontján áthaladó, az asztal síkjára merőleges egyenes átmegy a kis golyó középpontján. A kis és nagy golyó középpontján áthaladó, az asztallapra merőleges síkmetszetet a 2. ábra. mutatja.

Pitagorász tétele alapján $(R + r)^2 = (R - r)^2 + x^2$, ahol x a kis és a nagy golyó asztalon lévő pontjainak a távolsága. Ez az x távolság a $2R$ oldalú szabályos háromszög súlyvonalának $\frac{2}{3}$-ad része, vagyis $x = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.

A két egyenletből kapjuk, hogy $r = \frac{1}{3}R$.



2. ábra

Dáné Károly

Beszámoló a III. Hegyi Lajos Matematikai Emlékversenyről

(Marosvásárhely, 1999. december 11.)

A *Hegyi Lajos* emlékversenyre évente, decemberben kerül sor a marosvásárhelyi *Bolyai Farkas Líceumban*. Iskolánk vezetősége és matematikatanárai így állítanak emléket a líceum egykori diákjának, a nyolcvanas években rendezett számos helyi és országos matematikaverseny díjazottjának, aki – máig is tisztázatlan körülmények között – hősi halált halt 1989 december 21-én városunk főterén.

Az idei versenyen Erdély nagyhírű iskoláiból közel száz, matematikát kedvelő és színvonalasan művelő diák vett részt. Sajnos a verseny kezdetekor vasutassztrájk bénította meg részlegesen a közlekedést, minek következtében néhány csapat nem tehetett eleget a meghívásnak.

A versenyző diákok programját városnézés és buli tette teljesebbé. Az ünnepélyes eredményhirdetést Fodor Imre, Marosvásárhely polgármestere is megtisztelte jelenlétével.

Díjazottak:

IX. osztály

I. díj Dáné Andrea, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely

II. díj Szilágyi Márta, Báthory István Líceum, Kolozsvár

III. díj Sebe Attila, Báthory István Líceum, Kolozsvár

Dicséretek

Kiss Zsuzsa, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely

Klein Cristian, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

Orbán György, Báthory István Líceum, Kolozsvár

Kovács Károly, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely

X. osztály

I. díj Buksa Szilárd, Baróti Szabó Dávid Líceum, Barót

II. díj Bâtiu Daria, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

III. díj Pol Marius, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

Dicséretek

Sipos István, Ady Endre Líceum, Nagyvárad

Berekméri Melinda, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely

Gyöngyösi Éva, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely

László Tamás, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely

Szőcs Emese, Márton Áron Líceum, Csíkszereda

XI. osztály

I. díj Dávid László, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely

II. díj Măşcăşan Alexandru, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

III. díj Csibi Attila, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely

Dicséretek

Babu Andreea, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

Mátis Anikó, Apáczai Csere János Líceum, Kolozsvár

Ogrean Mihai, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

XII. osztály

I. díj Demeter Albert, Orbán Balázs Líceum, Székelykeresztúr

Stoica Emanuel, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

III. díj Mátis István, Apáczai Csere János Líceum, Kolozsvár
Popa Daniel, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

Dicséretek
Kósa Gergely, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely
Molnár Róbert, Németh László Líceum, Nagybánya
Tamás Levente, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely
Găbudean Călin, Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely

A versenyen a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

IX. osztály

1. Egy hétjegyű telefonszámot ($a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$) megjegyezhetőnek nevezünk, ha az $a_1a_2a_3$ számjegysorozat megegyezik az $a_4a_5a_6$ vagy $a_5a_6a_7$ számjegysorozatok valamelyikével (esetleg mindkettővel). Minden egyes a_i a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek bármelyike lehet. Hány megjegyezhető telefonszám van összesen?

2. Határozzátok meg az x, y és z valós számokat, ha:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}.$$

3. Oldjátok meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x+y)^2-4(x-y)=13.$$

4. Adott a síkban két háromszög: ABC és $A'B'C'$, súlypontjaik G illetve G'. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\cdot\overrightarrow{GG'}$;

b) ha $\overrightarrow{A'B}=k\cdot\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C}=k\cdot\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'A}=k\cdot\overrightarrow{C'B}$ $(k\in\mathbb{R},\ k\neq 1)$, akkor G és G' egybeesnek.

X. osztály

1. Bizonyítsátok be, hogy ha $z_1, z_2, \ldots, z_n\in\mathbb{C}$ és $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|$, akkor:

$$\left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)\cdot\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)\cdot\left(1+\frac{z_1}{z_n}\right)\in\mathbb{R}.$$

2. Oldjátok meg a következő egyenletet:

$$\log_3(2^x+1)=\log_2(3^x-1).$$

3. Két szabályos háromoldalú gúla alapja közös. Két oldalél által bezárt szög mértéke az egyik gúlán α, a másikon β. A közös alaphárom szög köré írt kör sugara a két gúla magasságának mértani középarányosa. Igazoljátok, hogy:

$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}.$$

4. Egy konvex négyszögben AB és CD szembenfekvő oldalak. Mindkettőt 3 egyenlő részre osztjuk, és a megfelelő szembenfekvő osztópontokat összekötjük. (A keletkezett szakaszok nem metszik egymást.) Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett 3 négyszög között van olyan, amelyiknek a területe egyenlő az adott négyszög területének egyharmadával.

XI. osztály

1. Adott egy $n\times n$ mezőből álló sakktábla. Legkevesebb hány mezőt kell találomra kifesteni, hogy biztosan létezzen legalább egy teljesen befestett sor vagy oszlop?

2. Legyen $A\in M_n(\mathbb{R})$; $A^2=0_n$. Igazoljátok, hogy:

a) $\det(A+I_n)>0$;

b) ha n páratlan szám, akkor $\det(A+I_n)\geq\det(A-I_n)$.

3. Legyen $x_n=\sin\pi\sqrt[3]{n^3+n+\pi}$, $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $z_n=nx_n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Tanulmányozzátok az $(x_n)_{n>0}$, $(y_n)_{n>0}$ és $(z_n)_{n>0}$ sorozatok konvergenciáját, és amelyiknek van, számítsátok ki a határértékét!

4. Adott $a_0=a_1=0$, $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Bizonyítsátok be, hogy a $b_n=\sqrt[n]{\frac{a_n}{n(n-1)}}$ összefüggéssel értelmezett $(b_n)_{n\geq 2}$ sorozat konvergens, és számítsátok ki a határértékét!

XII. osztály

1. Az $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin 2nx}{\sin x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ függvény egyik primitív függvénye F. Bizonyítsátok be, hogy ha $\lim\limits_{\substack{n\to 0 \\ n>0}} F(x) = 0$, akkor $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)$.

2. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $s_n = \sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \ldots + \sin^2\alpha_n$. Bizonyítsátok be, hogy $\operatorname{tg}^2\alpha_1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}^2\alpha_n \geq \frac{n \cdot s_n}{n - s_n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

3. Legyen $(G, \cdot)$ egy csoport, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\exists a \in G \text{ úgy, hogy } \forall x \in G \text{ esetén } a \cdot x^n \cdot a = x.$$

Bizonyítsátok be, hogy ha $n = 2$, akkor G csak egy elemből áll, ha pedig $n = 3$, akkor G kommutatív csoport.

4. Hány megoldása van az egész számok halmazában az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10^n}$ egyenletnek? $(n \in \mathbb{N}^*)$

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2000. május 31.

A következő öt feladatot az 1980-ban indult ***Városok Viadala (Tournament of Towns)*** *nemzetközi matematikaverseny első két évének feladatai közül válogattuk.*

145. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$y^k = x^2 + x$$

egyenletet, ahol k 1-nél nagyobb egész szám!

146. Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, a köréírt kör középpontja O. Mutassuk meg, hogy az AOC töröttvonal felezi a négyszög területét!

147. Jelölje $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{101}$ a 2, 3, 4, ..., 102 számok egy permutációját. Adjuk meg a tekintett számok összes olyan permutációját, amelyekre teljesül, hogy a_k osztható k-val bármely $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 101\}$ esetén!

148. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív valós szám előáll kilenc olyan valós szám összegeként, amelyek tizedestört alakjában csak a 0 és a 7 számjegy szerepel!

149. Egy egységnyi oldalú négyzetben adott néhány szakasz úgy, hogy mindegyik párhuzamos a négyzet valamelyik oldalával, és a szakaszok összhossza 18. (A négyzet és a szakaszok is határpontjaikkal együtt értendők.) Igazoljuk, hogy a négyzetben a szakaszok által létrehozott tartományok közül legalább az egyiknek a területe nem kisebb, mint 1/100 !

Feladatmegoldások (130-134. feladatok)

130. Véletlenszerűen kiválasztunk négy számot az $\{1; 2; \ldots; 3n\}$ halmazból, ahol n 1-nél nagyobb rögzített pozitív egész szám. Mi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok összege 3-mal osztható?

Lengyel versenyfeladat

Megoldás: Bontsuk a tekintett halmazt a hármas maradékok szerint három n elemű részhalmazra. (Az azonos részhalmazba tartozó számok hármas maradéka megegyezik.) Ezután vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amelyekben a négy kiválasztott szám összegének hármas maradéka 0. Ezek a következők:

0, 0, 0, 0
0, 0, 1, 2
0, 1, 1, 1
0, 2, 2, 2
1, 1, 2, 2

Mivel bármelyik négy szám kiválasztása egyformán valószínű, ezért a valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja szerint a keresett valószínűséget a kedvező esetek és az összes eset számának hányadosaként kapjuk.

A kedvező esetek száma az egyes maradékok elosztása alapján, felhasználva, hogy mindegyik osztályban pontosan n elem van, és a sorrendre nem kell tekintettel lennünk:

$$\binom{n}{4}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{1}^2+2\cdot\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{3}+\binom{n}{2}^2.$$

Az összes esetek száma $\binom{3n}{4}$.

A keresett valószínűség e két kifejezés hányadosa, amely a binomiális együtthatók kifejtése és a kapott kifejezés azonos átalakítása után:

$$P=\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{n^3(n-1)}{2}+2\cdot\frac{n^2(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{n^2(n^2-1)}{4}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)}{4!}}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{27n^2-27n+6}{12}\cdot\frac{24}{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)}=$$

$$=\frac{3(9n^2-9n+2)}{9(9n^2-9n+2)}=\frac{1}{3}.$$

A keresett valószínűség tehát 1/3.

Kiss Géza, Kisújszállás

A megoldók száma: 10.

131. Legyen P az ABC szabályos háromszög tetszőleges belső pontja. Tükrözzük P-t a BC, AC és AB oldalegyenesekre, a tükörképek legyenek rendre D, E és F. Melyik háromszög területe a nagyobb, az ABC háromszögé vagy a DEF háromszögé?

Megoldás: Jelölje a az ABC szabályos háromszög oldalának, m pedig a magasságának hosszát. Legyen továbbá $PD=2x$, $PE=2y$, $PF=2z$ (*1. ábra*).

Az ABC háromszög területe egyrészt $am/2$, másrészt $a(x+y+z)/2$, ahonnan $m=x+y+z$. Tudjuk továbbá, hogy $a=\frac{2m}{\sqrt{3}}$, így

$$T_{ABC}=\frac{m^2}{\sqrt{3}}=\frac{(x+y+z)^2\sqrt{3}}{3}.$$

A DEF háromszög területének meghatározása végett vegyük figyelembe, hogy az ABC háromszög mindegyik szöge 60°-os, valamint azt, hogy PD, PE, PF merőlegesek az ABC háromszög megfelelő oldalaira, ezért $EPD\sphericalangle = FPE\sphericalangle = DPF\sphericalangle = 120°$. Így a DEF háromszög területe

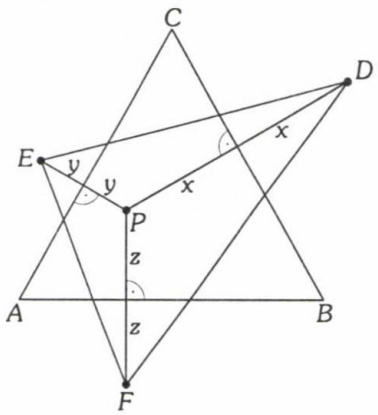
$$T_{DEF}=\frac{(4xy+4yz+4zx)\cdot\sin 120°}{2}=(xy+yz+zx)\cdot\sqrt{3}.$$

A két terület különbsége

$$T_{ABC}-T_{DEF}=\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=$$

$$=[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\geq 0,$$

ami azt jelenti, hogy az ABC háromszög területe bármely belső P pont esetén nem kisebb a DEF háromszög területénél, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha P az ABC szabályos háromszög középpontja.



1. ábra

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

132. Határozzuk meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre

$$f(f(x))+\sin x=0$$

bármely valós x esetén!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Nem létezik a tekintett függvényegyenletet kielégítő folytonos függvény.
Az eredeti függvényegyenlet ekvivalens a

$$-\sin(f(x)) = f(-\sin x) \qquad (1)$$

egyenlettel, ezért ezt vizsgáljuk.
Ha $x = 0$, és $f(0) = y$, akkor (1)-ből $-\sin y = y$, ahonnan $f(0) = 0$.
(1)-ből az is adódik, hogy f a $[-1, 1]$ intervallumot önmagába képezi le. Így $f(f(x))$ is önmagába képezi a $[-1, 1]$ intervallumot.
f a $[-1, 1]$ intervallumon injektív. Ennek bizonyítása céljából tegyük fel, hogy van olyan $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ $(x_1 < x_2)$, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ekkor viszont $\sin x_1 = \sin x_2$ is teljesülne, ami ellentmond annak, hogy a $\sin x$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. Kaptuk tehát, hogy f a $[-1, 1]$ intervallumon szigorúan monoton.
Tegyük fel, hogy f növekvő a $[-1, 1]$ intervallumon. Ekkor, mivel $f(0) = 0$, ha x pozitív, akkor $f(x)$ is, és $f(f(x))$ is pozitív, ami ellentmond annak, hogy $-\sin x$ viszont negatív.
Ha f csökkenő lenne, akkor pozitív x esetén $f(x)$ negatív, míg $f(f(x))$ pozitív lenne, ami most is ellentmond annak, hogy $-\sin x$ negatív.
Ezzel beláttuk, hogy nincs megfelelő f függvény.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári
Szász Róbert, Marosvásárhely
Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 4.

133. Határozzuk meg mindazokat a pozitív egész n számokat, amelyekre a

$$P_n(x) = x^{2n} + (x+1)^{2n} + 1$$

polinom osztható a $T(x) = x^2 + x + 1$ polinommal!

Osztrák versenyfeladat

I. megoldás: A $T(x)$ polinom gyökei az $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és a $\beta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ harmadik komplex egységgyökök. Könnyen bizonyíthatóak a következő egyszerű összefüggések: $\alpha^2 = \beta$; $\beta^2 = \alpha$; $(\alpha+1)^2 = \alpha$; $(\beta+1)^2 = \beta$; $\alpha^3 = \beta^3 = 1$. Ezek alapján

$$P_n(\alpha) = (\alpha^2)^n + ((\alpha+1)^2)^n + 1 = \alpha^n + \beta^n + 1,$$

és

$$P_n(\beta) = (\beta^2)^n + ((\beta+1)^2)^n + 1 = \alpha^n + \beta^n + 1.$$

Legyen $n = 3k + r$, ahol r értéke 0, 1 vagy 2 lehet.

$$P_n(\alpha) = P_n(\beta) = \alpha^n + \beta^n + 1 =$$
$$= \alpha^r + \beta^r + 1 = \begin{cases} 3, \text{ ha } r = 0 \\ 0, \text{ ha } r = 1 \text{ vagy } r = 2 \end{cases}$$

Látható, hogy $T(x)$ pontosan akkor osztója $P_n(x)$-nek, ha a 3 nem osztója n-nek.

Több megoldás alapján

II. megoldás: Könnyen látható, hogy $P_1(x) = 2T(x)$, $P_2(x) = 2T^2(x)$ és $P_3(x) = (x^6 - 1) + ((x+1)^6 - 1) + 3$. Némi számolással adódik, hogy $x^6 - 1 = (x-1)(x^3+1)T(x)$ és $(x+1)^6 - 1 = (x+2)((x+1)^3 - 1)T(x)$. Ezeket felhasználva látható, hogy $T(x)$ nem osztója $P_3(x)$-nek, és a

$$P_{n+3}(x) - P_n(x) =$$
$$= x^{2n}(x^6 - 1) + (x+1)^{2n}((x+1)^6 - 1)$$

különbség osztható $T(x)$-szel, azaz $P_{n+3}(x)$ pontosan azokra az n-ekre osztható $T(x)$-szel, amelyekre $P_n(x)$ is osztható ezzel a polinommal. Ezekből az észrevételekből teljes indukcióval bizonyítható, hogy pontosan a 3-mal nem osztható n-ekre osztható $P_n(x)$ $T(x)$-szel.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 7.

134. Tekintsük a következő egyenletet:

$$1 + z_1 + z_1z_2 + z_1z_2z_3 + \ldots + z_1z_2z_3\ldots z_n = 0 \qquad (1)$$

Igazoljuk, hogy $n > 1$ esetén

a) egyenletünknek végtelen sok, páronként különböző komplex számokból álló $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ megoldása van;

b) ha $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ megoldása (1)-nek, és $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n|$, akkor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} < r < 2 - \frac{1}{2^n}!$$

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: a) Legyen $n = 2p + 1$ (p pozitív egész). A $\left]0; \frac{\pi}{2n}\right[$ intervallumból végtelen sokféleképpen választhatók ki az egymástól páronként különböző α_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ valós számok. Ha $\alpha_{p+1} = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p)$, $\alpha_{p+2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ és $\alpha_{p+k} = 2\pi - \alpha_{p-k+3}$ $(k = 3, 4, \ldots, p+1)$, akkor az α_k $(k = 1, 2, \ldots, 2p+1)$ valós számok páronként különbözőek és $\alpha_k \in]0; 2\pi[$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ebből következik, hogy a $z_k = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ komplex számok is páronként különbözőek, továbbá

$$1+z_1+z_1z_2+\ldots+z_1z_2\ldots z_n=$$
$$=1+\sum_{k=1}^{p}[\cos(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+i\sin(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)]+$$
$$+\cos\pi+i\sin\pi+$$
$$+\sum_{k=p+2}^{2p+1}[\cos(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+i\sin(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)]=$$
$$=\sum_{k=1}^{p}[\cos(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+i\sin(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}[\cos(\pi+\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+i\sin(\pi+\alpha_1+\ldots+\alpha_k)]=0.$$

Legyen a továbbiakban $n = 2p$ (p pozitív egész). Ekkor legyenek $\alpha_k \in \left]0;\ \frac{2\pi}{n}\right[$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ páronként különböző valós számok, és legyen $\alpha_p = \frac{2\pi}{3} - (\alpha_1+\ldots+\alpha_{p-1})$, $\alpha_{p+1} = \frac{\pi}{3} + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{p-1}$, $\alpha_{p+k} = 2\pi - \alpha_{p-k+1}$ $(k = 2, 3, \ldots, p-1)$ és $\alpha_{2p} = \frac{\pi}{3} - \alpha_1$. Az így értelmezett α_k $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$ valós számok páronként különbözőek, és mindegyik benne van a $]0; 2\pi[$ intervallumban. Így a megfelelő z_k komplex számok is páronként különbözőek, és

$$1+z_1+z_1z_2+\ldots+z_1z_2\ldots z_n=$$
$$=1+\sum_{k=1}^{p-1}[\cos(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+i\sin(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)]+$$
$$+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}+$$
$$+\sum_{k=1}^{p-1}[\cos(\pi+\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+i\sin(\pi+\alpha_1+\ldots+\alpha_k)]+$$
$$+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=0.$$

b) Ha $r > 1$, akkor mivel (1) alapján $-z_1z_2\ldots z_n = 1+z_1+z_1z_2+\ldots+z_1z_2\ldots z_{n-1}$, ezért

$$r^n \le 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1},$$

amely egyenlőtlenséget a pozitív $(r-1)$ tényezővel szorozva, kapjuk, hogy

$$r^{n+1} - r^n \le r^n - 1.$$

Ebből egyrészt adódik, hogy $r \le 2$, másrészt ezt felhasználva

$$r \le 2 - \frac{1}{r^n} \le 2 - \frac{1}{2^n},$$

ami az $r > 1$ feltételezés mellett az egyenlőtlenséget bizonyítja.

Ha $r = 1$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $r < 1$. Ekkor (1)-ből $-1 = z_1 + z_1z_2 + \ldots + z_1z_2\ldots z_n$, ahonnan

$$1 \le r + r^2 + \ldots + r^n$$

adódik, amit a pozitív $(1-r)$ tényezővel szorozva és 2-vel osztva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} + \frac{r^{n+1}}{2} \le r.$$

Ebből egyrészt $r \ge \frac{1}{2}$, másrészt ezt felhasználva

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} \le r$$

adódik, ami az $r < 1$ feltételezés mellett az egyenlőtlenséget bizonyítja.

Szász Róbert, Marosvásárhely

A megoldók száma: 3.

A megoldók névsora: Dályay Pál Péter, Szeged (130. 2 mód, 131. 5 mód, 132., 133. 3 mód, 134.); Gehér László, Budapest (130., 131., 133.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (131.); Kiss Géza, Kisújszállás (130., 131.); László Sándor, Szombathely (130. 2 mód, 131.); Schutzbach Mártonné, Siófok (130., 131.); Simon József, Csíkszereda (130., 131., 132. 2 mód); Szász Róbert, Marosvásárhely (130-134.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (130-132., 133. 3 mód); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (130., 131. 2 mód, 132. 2 mód, 133. 2 mód, 134. 2 mód); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (130., 131., 133.).

Hibaigazítás: A Matematika Tanítása 2000/1. számának feladarovatában a **143.** feladat szövege hibásan jelent meg, így a feladatban megfogalmazott állítás nem igaz. A feladat kitűzőjétől és a Tisztelt Olvasóktól elnézést kérünk, és alább közöljük a helyesen megfogalmazott feladatot. A feladat megoldásának beküldési határideje: **2000. május 31.**

143. Jelölje a hegyesszögű ABC háromszög területét T, körülírt körének sugarát R; a magasságok talppontja által meghatározott $A_1B_1C_1$ háromszög területét t, beírt körének sugarát r. Mutassuk meg, hogy $\frac{T}{t} = \frac{R}{r}$!

Bíró Bálint, Eger

PÁLYÁZAT

TANKÖNYVÍRÁSRA

A Mozaik Kiadó pályázatot hirdet általános és középiskolai tankönyvcsaládok megírására az alábbi tantárgyakból:

- **IRODALOM**
- **TÖRTÉNELEM**
- **TECHNIKA**
- **RAJZ**

A pályázati anyagnak tartalmaznia kell:

- rövid szakmai önéletrajzot
- a tankönyvcsalád tervezett felépítését, koncepcióját
- egy fejezet tematikáját
- a fejezet kidolgozott részletét (3-4 óra anyaga)

A pályázat leadásának határideje:
Irodalom, történelem: 2000. május 20.
Technika, rajz: 2000. április 30. (meghosszabbítva)

A pályázaton nyertes pályamű szerzőjével a kiadó szerződést köt a tankönyvcsalád megírására. A pályázatról részletes felvilágosítást nyújt Árokszállási Ildikó és Tóth Katalin.

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 470-101, 488-282
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73., Tel.: (62) 485-522

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

KÖNYVTÁR PEDAGÓGUSOK HÁZA

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny Erkel Ferenc Gimnázium, Gyula

(Marczis György)

A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik feladatáról

(Ábrahám Kinga – Csorba Ferenc)

Logikai műveletek a természetes számok halmazán

(Kocsis Orsolya)

VIII. ÉVFOLYAM 2000 3

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda Kft.-ben

TARTALOM

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny
Erkel Ferenc Gimnázium, Gyula
Marczis György
szaktanácsadó, Gyula

A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik feladatáról
Ábrahám Kinga
tanár, Sopron
Csorba Ferenc
szaktanácsadó, Győr

Beszámoló a IX. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről
Dr. Urbán János
tanár, Budapest

A XXIX. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5-8. osztály)

Ericsson-díj tanároknak

Logikai műveletek a természetes számok halmazán
Kocsis Orsolya
tanár, Szolnok

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Marczis György

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny Erkel Ferenc Gimnázium, Gyula

„Minden, ami emberi, akár jó, akár rossz, előbb-utóbb véget ér. Kivéve a matematikát."
(Erdős Pál)

Minden eddiginél nagyobb sikerrel zárult március 18-án Gyulán az *Erkel Ferenc Gimnázium*ban a Bolyai János Matematikai Társulat *Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap*ja. Immár negyedszerre gyűltek össze a fürdővárosi gimnáziumban Békés megye legjobb középiskolás matematikusai és az érdeklődő matematikatanárok.

A vendégeket az ünnepélyes megnyitón *Fazekas Borbálának* és *Hőgye Orsolyának*, a rendező iskola két tanulójának fuvolajátéka köszöntötte. Ezután *dr. Kereskényi Miklós*, az Erkel Ferenc Gimnázium igazgatója, *dr. Hajnal Péter*, a verseny névadójának fia valamint *Marczis György*, a szervezésért felelős szaktanácsadó üdvözölte a közel kétszáz megjelentet.

Miközben a diákok a 120 percesre tervezett 30 feladatos tesztlapot töltötték ki, addig az érdeklődő vendégek meghallgathatták *dr. Németh József* egyetemi docens *„Néhány sorozat alkalmazásokkal"*, *Somfai Zsuzsa* vezető szaktanácsadó *„Gyengéknek jól matematikát"*, *dr. Bonifert Domonkos* főiskolai tanár *„Megoldási szintek és módok"*, *Fábosné Zách Enikő* vezető tanító *„Az érdeklődés felkeltése az alsó tagozatos matematikában"* valamint *dr. Hajnal Péter* egyetemi docens *„Zárójelek, fák, háromszögelések"* című előadásait.

Miután a diákok befejezték munkájukat, a négyfős zsűri *(dr. Németh József, Uhrin János, dr. Pomuczné Nagy Ildikó és Szabó Zsófia)* az értékelőlapok kijavításához kezdett. Ezalatt Kosztolányi József egyetemi adjunktus ismertette az általa összeállított feladatlap helyes megoldását.

A programokkal egy időben a *Műszaki Könyvkiadó*, a *Mozaik Oktatási Stúdió*, a *Konsept-H Kft.* és a *Texas Instruments* a témával kapcsolatos kiadványaiból tartott vásárlással egybekötött bemutatót.

Kora délután már eredményt hirdettek. *Dr. Németh József*, a zsűri elnöke értékelte a versenyzők munkáját, és kiemelte, hogy a nehéz feladatok ellenére igen magas pontszámot értek el a legjobb tanulók. Ezután átadta a győztesnek és a helyezetteknek, valamint felkészítő tanáraiknak a támogatók által felajánlott értékes jutalmakat. Az egész napos rendezvény *dr. Kereskényi Miklós* igazgató jövő évre szóló meghívó szavaival ért véget.

A verseny színvonalára való tekintettel a legjobbak felvételi kedvezményeket szerezhettek a felsőoktatási intézményekbe való jelentkezéskor.

A verseny végeredménye:

1. *Kádas Attila* (Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, tanára Szabó Zsófia),
2. *Jelenka József* (Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, tanára Pocsai Zoltánné),
3. *Baur Eszter* (Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, tanára Szabó Zsófia),

4-5. *Szántó Imre* (Karácsonyi János Katolikus Gimnázium, Gyula, tanára Veress Erzsébet) és
Nadabán János (Széchenyi István Közgazdasági és Külkereskedelmi Szakközépiskola, Békéscsaba, tanára dr. Rókáné Rózsa Anikó),

6. *Benkő Zoltán* (Táncsics Mihály Gimnázium, Orosháza, tanára Hegedűs Zoltán).

A Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata és az Erkel Ferenc Gimnázium köszöni mindazoknak a segítségét, akik nélkül a Hajnal Imre Matematika Tesztverseny nem jöhetett volna létre.

Fő támogatóink voltak: *Békés Megyei Pedagógiai Intézet, BJMT Békés Megyei Tagozata,*

Dürer Nyomda és Kiadó Kft., Erkel Ferenc Gimnázium Alapítvány, Gyula Város Polgármesteri Hivatala, Implom József Alapítvány, Mozaik Oktatási Stúdió – Szeged, Műszaki Könyvkiadó, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Texas Instruments, Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Támogattak: *AQUARELL - Kovács Z, Köles M., Pfeff M., Szabó Z., Bagyinszki Zoltán, Békés Megyei Hírlap, Békés Megyei Nap, Bibliofil Kft. Könyvesbolt - Gyula, BOBOSZ Kft. - Bor Gábor, Szabó István, Busa László, Corvin Hotel - Gyula, Csepi Ker. Kft. - Csepregi Lajos, Dürer Albert Általános Iskola - Gyula, ÉLÉSKER Kft. - Gyula, Ez is az is" ABC - Bacsa Magdolna, FHM Munkás Kft. - Ózd, Göndöcs Benedek Szakképző Iskola, Győri Keksz Kft. - Pásztor Zoltán, Gyula városi Sportcsarnok-Horváth Béla, Gyulai Hírlap, Gyulai Húskombinát Szakszervezeti Tanácsa, Gyulai Várszínház, Hevesi Tamás, Info-Set Kft. - Kiss Imre, Kereskedelmi és Hitelbank - Gyula, Kertes és Társa Kereskedelmi Kft. - Kertes István, Konsept-H Könyvkiadó és Kereskedelmi Kft., Körös Főiskola-Békéscsaba, Lingua Nyelvstúdió, Profi Foto - Puy László, Schneider Nyomda - Schneider János, SHANNON IRODA - Nyíregyháza, Start Műszaki - Maris Tibor, Surinás László, Szabó József, Tébi Ferenc, WELCOME Nyelviskola, Gyula - Fodorné Horváth Anett, Zugevő Pizzéria - Annus Géza.*

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny 2000

1. Melyik szám helyezkedik el a számegyenesen az 1/8-tól és az 1/10-től ugyanolyan távol?

(A) $\frac{1}{80}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{1}{9}$ (E) $\frac{9}{80}$

2. Egy téglalap egyik oldala 9 egységgel hosszabb, másik oldala 6 egységgel rövidebb, mint egy négyzet oldala. A téglalap és a négyzet területe egyenlő. Mekkora a négyzet kerülete?

(A) 18 (B) 36 (C) $4\left(3+\sqrt{5}\right)$

(D) 72 (E) $32\sqrt{3}$

3. $\frac{4^{1999}+4^{1999}+4^{1999}+4^{1999}}{2^{1999}+2^{1999}} =$

(A) 4^{1000} (B) 2^{11994} (C) 2^4
(D) 4^{3998} (E) 4

4. Egy egységnyi élhosszúságú kocka lapátlójának hossza d, testátlójának hossza e. $|d-e| =$

(A) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
(D) 0,32 (E) $\sqrt{3}-1$

5. Egy félkörlap kerülete $10+5\pi$. Ezt félbevágva két egybevágó negyedkörlapot kapunk. Mekkora egy ilyen negyedkörlap kerülete?

(A) $5+\frac{5\pi}{2}$ (B) $\frac{5\pi}{2}$ (C) $\frac{25\pi}{4}$ (D) $10+\frac{5\pi}{2}$
(E) nem dönthető el egyértelműen

6. Takarékos Pali 2000. februárjában mindennap félretett valamennyit a zsebpénzéből. Ha nem esett az eső, akkor csak 10 Ft-ot, ha viszont esett, akkor 31 Ft-ot. Hány esős nap volt ezalatt, ha összesen 416 Ft-ot gyűjtött össze?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

7. Legyen T egy téglalap. Hány olyan kör van a T síkjában, amelynek van olyan átmérője, hogy az átmérő mindkét végpontja T-nek csúcspontja?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Egy erdő 99%-a fenyőfa, 1%-a lombhullató fa. Az erdőgazdaság elhatározza, hogy kivágnak az erdőből fenyőfákat. A környezetvédők hatalmas tiltakozásba kezdenek, mire a gazdaság vezetője a következőkkel igyekszik megnyugtatni őket: „A fenyőfák kivágása után a megmaradó erdő 98%-a még mindig fenyő lesz." Az erdő hány százalékát akarják kivágni?

(A) 2% (B) 1% (C) 50%
(D) 10% (E) 49%

9. Definiáljuk a valós számok körében a következő műveletet:

$$x * y = \sqrt{x+y}$$

Hány állítás igaz az alábbiak közül, ha a, b, c nemnegatív valós számok?

(1) Van olyan a és b, amelyekre $(a-2000)*(b-2000)=a*b$.
(2) Minden lehetséges a, b, c esetén teljesül, hogy $(a*b)*c=a*(b*c)$.
(3) Van olyan a, b, c, melyekre $(a*b)*c=a*(b*c)$.
(4) Minden lehetséges a és b esetén teljesül, hogy $a*b=b*a$.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

10. Egy háromszög belső szögeinek nagysága egy számtani sorozat három egymást követő tagja. A háromszög külső szögei lehetnek:

(A) 42°, 120°, 198° (B) 77°, 120°, 163°
(C) 35°, 150°, 175° (D) 86°, 120°, 164°
(E) 105°, 115°, 125°

11. Egy kétórás koncerten a közönség lelkes 5%-a végig tapsolt, 20%-a viszont egyáltalán nem tapsolt. A többi hallgatónak a kétharmada a koncert egynegyedén tapsolt, s akikről még nem esett szó, azok a koncert felén. A közönség tagjai átlagosan hány percig tapsoltak a koncerten?

(A) 30 (B) 27 (C) 36 (D) 45 (E) 52,5

12. Melyik hat szám nem lehet egy tetraéder (háromszög alapú gúla) hat élének hossza?

(A) 2, 3, 4, 5, 6, 7
(B) 3, 4, 5, 6, 7, 8
(C) 6, 7, 8, 9, 10, 11
(D) 10, 20, 30, 40, 50, 60
(E) 12, 18, 24, 30, 36, 42

13. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög beírt körének sugara 2. Területe

(A) 4 (B) $12+8\sqrt{2}$ (C) $8-12\sqrt{2}$
(D) 8 (E) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$

14. Mekkora a területe annak a síkidomnak, amelynek $(x; y)$ határolópontjaira teljesül, hogy $|x|+|y|=4$?

(A) 32 (B) 16 (C) $16\sqrt{2}$
(D) 4π (E) 64

15. $\Big|\ldots\big|\big|-1\big|-2\big|-3\big|-\ldots-2000\Big|=$

(Összesen 2000-szer szerepel az $|\ |$ abszolútértékjel.)

(A) 2000 (B) –1000 (C) 1001
(D) 0 (E) 1000

16. Egy egyenlő szárú háromszög két oldalának hossza 10 és 12 egység. Az alábbiak közül melyik nem lehet a háromszög magassága?

(A) 8 (B) $\sqrt{44}$ (C) 9,6
(D) $\sqrt{119}$ (E) $\frac{5\sqrt{119}}{6}$

17. A p paraméter mely valós értéke esetén van az

$$|x-p|+|x+4|=2p$$

egyenletnek végtelen sok valós megoldása?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
(E) nincs megfelelő p érték

18. Jelölje $P(n)$ az n pozitív egész szám páratlan számjegyeinek szorzatát (pl. $P(1493)=1\cdot 9\cdot 3=27$).

$$P(P(P(P(98765432101234567 89))))=$$

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

19. Az ABC háromszög BC oldalát hosszabbítsuk meg C-n túl az AC oldal hosszával. Az új végpont legyen D. Milyen hosszú az ABC háromszög C csúcsából induló belső szögfelezőnek a háromszögbe eső szakasza, ha $\frac{BC}{AC}=x$ és $AD=d$?

(A) $\frac{d}{x}$ (B) $\frac{d}{x+1}$ (C) $\frac{dx}{x+1}$
(D) $\frac{d}{2}$ (E) ezek közül egyik sem

20. Kata négy darab szabályos dobókockával dobott, és megállapította, hogy a dobott számok szorzata 144. Az alábbi számok közül melyik nem lehetett a dobott számok összege?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

21. Egy téglatest alakú doboz 12 élének összhossza 140, és a doboz egy sarkának a tőle legtávolabb eső saroktól mért távolsága 21. Mekkora a doboz felszíne?

(A) 776 (B) 784 (C) 798
(D) 800 (E) 812

22. Négy lány – Mariann, Alíz, Teri és Hédi – egy koncerten triókat énekelt. Minden dalnál egy lány ült, a többiek énekeltek. Hédi 7 dalt énekelt összesen, ami több volt mindenkiénél. Mariann 4 dalt énekelt, ennyire keveset egyik lány sem énekelt rajta kívül. Hány dalt adtak elő a lányok összesen?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

23. Tekintsük a 20, 21 és 29 egységnyi oldalakkal rendelkező háromszög köréírt körét. A kör belsejét a háromszög négy részre osztja. Jelölje A, B és C a körlap háromszögön kívüli részeinek területét úgy, hogy közöttük C a legnagyobb. Melyik összefüggés helyes az alábbiak közül?

(A) $A+B=C$ (B) $A+B+210=C$
(C) $A^2+B^2=C^2$ (D) $20A+21B=29C$
(E) $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=\frac{1}{C^2}$

24. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. Hány zöld sapka van a dobozban, ha a következő négy állítás közül pontosan három igaz?

(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van közöttük fehér.
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük zöld.
(3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs közöttük sem piros, sem kék.
(4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen közöttük piros.

(A) 26 (B) 27 (C) 24 (D) 18 (E) 59

25. Egy egységkocka valamely testátlójának két végpontja köré egy-egy egységnyi sugarú gömböt írunk. Mekkora térfogatú a kocka belsejének azon része, amely mindkét gömbben benne van?

(A) $\frac{4\pi}{3}-\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$
(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $1-\frac{\pi}{3}$ (E) $1-\frac{\pi}{6}$

26. Az a_1, a_2, a_3, ... sorozatban $a_1=5$, és minden n pozitív egész számra $a_{n+1}=(1024-n^2)\cdot a_n$. Ekkor a_{64} értéke

(A) –10 milliónál kisebb (B) 5 (C) 0
(D) 5120 (E) 10 milliónál nagyobb

27. Adott a síkon n pont úgy, hogy közülük semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. A pontok által meghatározott egyenesek és háromszögek számának összege 455. Mekkora az n értéke?

(A) 10 (B) 5 (C) 13 (D) 15 (E) 14

28. Adott három egymást nem fedő síkbeli szabályos sokszög, melyek mindegyik oldala egységnyi hosszúságú, s közülük legalább kettő egybevágó. A sokszögek az A pontban találkoznak oly módon, hogy a három belső szög összege az A pontban éppen 360°. Így a három sokszög együttesen egy újabb sokszöget alkot, melynek A belső pontja. Mekkora lehet a lehető legnagyobb kerülete ennek az új sokszögnek?

(A) 12 (B) 14 (C) 18 (D) 21 (E) 24

29. Hány olyan $P(x; y)$ pont van a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedében, amelynek koordinátái pozitív egész számok, és teljesül rájuk a következő két feltétel?

(1) x és y legnagyobb közös osztója 2;
(2) $y \le -\frac{x}{400}+5$.

(A) 4000 (B) 700 (C) 800
(D) 1600 (E) végtelen sok

30. Az a_1, a_2, a_3, ... sorozatban $a_1=19$, $a_9=99$ és minden $n>2$ esetén a_n az első $n-1$ elem számtani közepe. Mivel egyenlő a_2?

(A) 29 (B) 59 (C) 79 (D) 99 (E) 179

A feladatsort *Kosztolányi József*, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének adjunktusa állította össze. A feladatok helyes megoldásai: E, D, A,C, D, D, D, C, C, B, C, D, B, A, E, B, B, C, C, E, B, A, B, D, A, C, E, D, B, E

Ábrahám Kinga – Csorba Ferenc

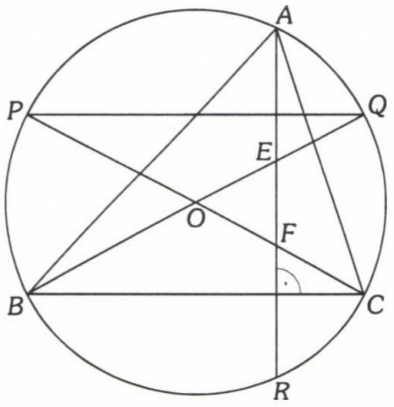
A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik feladatáról

A IX. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyre (Dunaszerdahely, 2000. március 24-27.) az alábbi feladatot javasoltuk:

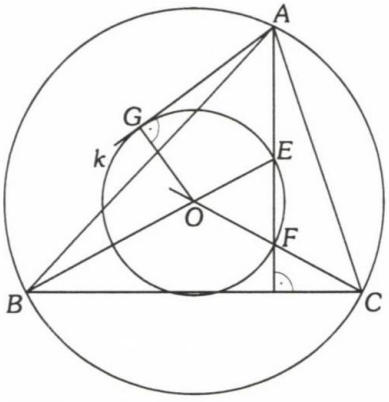
Tegyük fel, hogy az ABC hegyesszögű háromszögben $AB > AC$ és jelölje a háromszög köré írt kör középpontját O. Az A csúcsból húzott magasságvonal a BO egyenest az E, a CO egyenest az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AE \cdot AF = BE \cdot CF$!

A feladat a 11. osztályosok versenyén szerepelt, meglepetésünkre és egyben örömünkre a versenyzők változatos, szellemes megoldásokat találtak. Ezek közül adjuk közre néhánynak a vázlatát.

I. $AE \cdot AF = BE \cdot CF$ rendezés után $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{AF}$, elegendő tehát belátni, hogy $AEB_\triangle \sim CFA_\triangle$. Használjuk az ábra jelöléseit! A $BCQP$ négyszög téglalap, így BR ív $= PA$ ív a szimmetria miatt, ezért $BAR\sphericalangle = PCA\sphericalangle$. Az OEF háromszög egyenlő szárú ($OE = EF$), mivel a QOC háromszög egyenlő szárú és $EF \perp BC$ (vagy $EF \parallel QC$). Ebből következik, hogy $BEA\sphericalangle = AFC\sphericalangle$, azaz AEB háromszög hasonló a CFA háromszöghöz, tehát állításunk igaz.



II. Legyen az ABC háromszög köré írt kör sugara R. Az OEF háromszög egyenlő szárú, az O pont köré rajzolt $OF = OE = r$ sugarú kör legyen k. $AE \cdot AF$ az A pont k körre vonatkoztatott hatványa, ami egyenlő az érintőszakasz négyzetével, GA^2-nel, azaz $AE \cdot AF = GA^2$. Az OAG háromszögre felírva Pitagorasz tételét $GA^2 = OA^2 - OG^2 = R^2 - r^2$ adódik. Másrészt $BE \cdot CF = (BO + OE)(OC - OF) = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2$, azaz $AE \cdot AF = BE \cdot CF$, amit igazolni kellett. ($AB > AC$ miatt a megadott pontok az ábrának megfelelően helyezkednek el.)



III. Használjuk az ábra jelölésit! Jelölje a háromszög szögeit rendre α, β, γ, oldalait a, b, c. A kerületi és középponti szögek közötti összefüggés alapján $BOC\sphericalangle = 2\alpha$. Az OBC háromszög egyenlő szárú, így $OBC\sphericalangle = OCB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. OT szögfelező az OBC háromszögben $AM \parallel OT$, ezért $BEM\sphericalangle = CFM\sphericalangle = \alpha$. Az ABC háromszögben felírhatjuk a következő összefüggéseket: $AM = b\sin\gamma = c\sin\beta$, $MC = b\cos\gamma$ és $MB = c\cos\beta$. A BME derékszögű há-

romszögben $BE = MB / \sin\alpha = c\cos\beta / \sin\alpha$, $EM = BE\cos\alpha = c\cos\beta\cos\alpha / \sin\alpha$.

A CMF derékszögű háromszögben $CF = \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{b\cos\gamma}{\sin\alpha}$, $FM = FC\cos\alpha = \frac{b\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$$AE = AM - EM = c\sin\beta - \frac{c\cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha} = c\frac{\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha} = -c\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

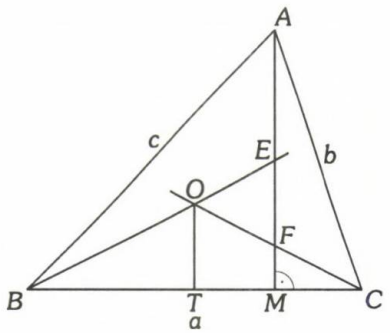
$$AF = AM - FM = b\sin\gamma - \frac{b\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha} = b\frac{\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha} = -b\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}.$$

$$AE \cdot AF = \frac{bc\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\gamma)}{\sin^2\alpha} = \frac{bc}{\sin^2\alpha}\cos\gamma\cos\beta.$$

$(\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma,\ \cos(\alpha+\gamma) = -\cos\beta)$.

$$BE \cdot CF = \frac{c\cos\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{b\cos\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{bc}{\sin^2\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma,$$

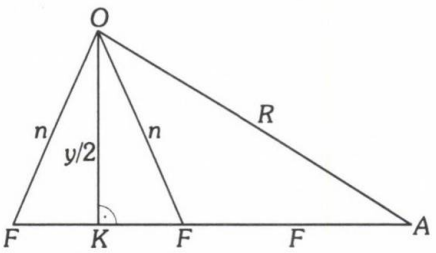
azaz $AE \cdot AF = BE \cdot CF$, ezzel állításunkat bizonyítottuk.



IV. Legyen $AE = x$, $EF = y$, a háromszög köré írt kör sugara R. Az OEF háromszög egyenlő szárú (többször beláttuk). Legyen továbbá $OE = OF = n$. $AE \cdot AF = BE \cdot CF$, akkor és csak akkor teljesül, ha $x(x+y) = (R+n)(R-n)$, azaz $x^2 + xy = R^2 - n^2$. Írjuk fel Pitagoras tételét az OKA háromszögre:

$$OK^2 = n^2 - (y/2)^2$$
$$OK^2 = R^2 - (x + y/2)^2.$$

Ezekből $R^2 - n^2 = x^2 + xy$, amit bizonyítani akartunk.



Megjegyzések: Amikor a feladatot kitűzésre javasoltuk, nem tudtuk az eredetét (most sem). Azóta megjelent dr. Gerőcs László: Azok a csodálatos húrnégyszögek (Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1999) című remek könyve, amelynek 48/b. feladata éppen ez.

A versenyzők elég változatos módon bizonyították az AEB és a CFA háromszögek hasonlóságát. Néhányan személyekről elnevezett tételekről beszéltek. Volt, aki Leibniz tételét említette. A leírtakból sem sikerült kideritenünk, mire is gondolt. Egy tanuló Steward tételét(?) írta fel az AOF háromszögre (mi, javítók ezt sem ismertük). A tétel alapján $OF^2 \cdot AE + OA^2 \cdot EF + OE^2 \cdot AF = EF \cdot AE \cdot AF$, vagy az előző megoldás ábrája alapján:

$$n^2 \cdot x + R^2 \cdot y - n^2(x+y) = y \cdot x(x+y),$$
$$n^2 \cdot x + R^2 \cdot y - n^2x - n^2y = x^2y + y^2x,$$

rendezve és $y \neq 0$-val mindkét oldalt elosztva $R^2 - n^2 = x^2 + xy$ adódik. Szerintünk ágyúval lőtt a verébre. De eltalálta!

A MacDonald-tételre viszont senki sem hivatkozott kétszer ugyanazon az oldalon, különböző állításokkal. (L. Robert Ainsley: Blöffölni pedig tudni kell Matek, Móra Könyvkiadó, 1995.)

Dr. Urbán János

Beszámoló a IX. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A IX. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt 2000. március 23-26-ig Szlovákiában, Dunaszerdahelyen a Magyar Tanítási Nyelvű Gimnázium rendezte. A szervezők Bíró Gizella igazgatóhelyettes, főszervező vezetésével jó házigazdaként, igazi vendégszeretettel gondoskodtak arról, hogy a közel 300 versenyző és kísérő tanár jól érezze magát.

A március 24-i ünnepélyes megnyitó után délután dr. Hortobágyi István (ELTE) „Szélsőértékfeladatok elemi megoldása geometriai módszerekkel" című előadását, illetve Kovács László Csallóköz történetéről szóló előadását hallgathatták meg az érdeklődők. Este a révkomáromi Sellye János Gimnázium tanulóinak GMSZ színháza előadásában a „Valahol Európában" című musicalt élvezhették a tanárok és diákok. A fiatalok fergeteges előadását hosszas tapssal jutalmazták a nézők.

A verseny, amely 4 órás volt, március 25-én délelőtt zajlott, délután a versenybizottság értékelése következett, amelynek munkáját, mint a zsűri elnöke, Urbán János irányította.

Vasárnap, március 26-án egész napos kiránduláson ismerkedhettünk Szlovákia egyes tájaival. A nagy többség Pozsony nevezetességeinek megismerését és Dévény várának megtekintését választotta, de volt egy csoport Pöstyénben és Vöröskőn, és egy Bajmócon is.

Az ünnepélyes eredményhirdetés és díjkiosztás március 27-én történt. A régióvezetők, illetve az egyes évfolyamok javítóbizottságainak vezetői (Neubauer Ferenc, Szabó Magda, Oláh György, Bencze Mihály tanárok) ismertették a bizottság általános véleményét, a dicséretesek nevét, majd a helyezéseket.

Az egyes osztályok versenyében a következők voltak a díjazottak:

9. osztály

I. díjasok:
Nagy Zoltán Lóránt, Budapest, Fazekas M. Gimn.
Bergmann Gábor, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.

II. díjasok:
Csóka Endre, Debrecen, Fazekas M. Gimn.
Szalai Attila, Szeged, Radnóti M. Gimn.

III. díjasok:
Nagy Gábor, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.
Pintér Balázs, Paks, Energetikai Szakközépisk.
Lang Péter, Győr, Révai M. Gimn.

10. osztály

I. díjasok:
Balogh János, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.
Simon András, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.
Spanczér Ilona, Nagykanizsa, Batthyány J. Gimn.

II. díjasok:
Csíkvári Péter, Budapest, Fazekas M. Gimn.
Gémes Norbert, Miskolc, Földes F. Gimn.

III. díjasok:
Boros Vazul, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.
Erdei Zsuzsa, Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn.
Sípos István, Nagyvárad, Ady E. Gimn.
Horváth Szabolcs, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Koll.
Dömötör Csilla, Győr, Révai M. Gimn.
Koreck Ferenc, Szeged, Radnóti M. Gimn.

11. osztály

I. díjasok:
Vörös László, Győr, Révai M. Gimn.
Pesti Gábor, Nagykanizsa, Batthyány J. Gimn.

II. díjas:
Lovrics Anna, Budapest, Berzsenyi D. Gimn.

III. díjasok:
Pogátsa Attila, Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn.
Ritter Ádám, Budapest, Fazekas M. Gimn.
Dávid László, Marosvásárhely, Bolyai Farkas Líceum

12. osztály

I. díjasok:

Demeter Albert, Székelykeresztúr, Orbán Balázs Líceum

Pálvölgyi Dömötör, Budapest, Fazekas M. Gimn.

II. díjas:

Hegyi Géza, Csíkszereda, Márton Áron Líceum

III. díjasok:

Gyürki István, Zselíz, Gimnázium

Bálint Balázs, Miskolc, Földes F. Gimn.

Balázs Péter, Kaposvár, Táncsics M. Gimn.

Kiss Norbert, Debrecen, Fazekas M. Gimn.

A versenyen a következő feladatokat kellett megoldaniuk a versenyzőknek:

9. osztály

1. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív számra igaz, hogy a

$$(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+2000)$$

szorzat osztható 2000^{99}-nel!

Oláh György (Komárom)

2. Ha az ABC háromszög AB és AC oldalán úgy vesszük fel a D és E pontokat, hogy $DE = DB = EC$ teljesüljön, akkor $AD = AE = BC$ is teljesül. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

Katz Sándor (Bonyhád)

3. Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki a 2000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül 1001-et, biztosan lesz a kiválasztottak között két olyan szám, amelyek különbsége 4.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

4. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a háromszögbe írt kör a D pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AD és DB oldalhosszúságú téglalap területe egyenlő az ABC háromszög területével!

Szabó Magda (Szabadka)

5. Az $1 \le x \le 3$ valós számokra az f függvényt a következő módon értelmezzük:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 9}{1 + 4x - x^2}.$$

Határozzuk meg f legkisebb értékét és azt az x helyet, ahol ezt a legkisebb értéket felveszi!

Árokszállási Eszter (Paks)

6. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y(1-x)^2 + x(1-y)^2 + (x+y)^2 - x^3 - y^3 = 2000.$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

10. osztály

1. Oldjuk meg az egész számok körében az

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1,$$
$$y + z - x = 3$$

egyenletrendszert!

Neubauer Ferenc (Munkács)

2. Az ABC derékszögű háromszögben ($ACB\sphericalangle = 90°$) a beírt kör K középpontját a háromszög köré írt kör O középpontjával összekötő egyenes az átfogóval 45°-os szöget zár be. Számítsuk ki az átfogó és a beírt kör sugarának arányát!

Mészáros József (Galánta)

3. Számítsuk ki az $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2000}$ összeget, ha

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Kántor Sándorné (Debrecen)

4. Az ABC háromszög BC oldalán úgy vettük fel az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pontokat, hogy az $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{n-1}$ félegyenesek a $BAC\sphericalangle = \alpha$ szöget n egyenlő részre osztják. Igazoljuk, hogy

$$AB \cdot AA_1 + AA_1 \cdot AA_2 + \ldots + AA_{n-1} \cdot AC = AB \cdot AC \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{n}}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

5. A táblára felírtak 3 pozitív egész számot. Egy lépésben a táblára felírt számok közül egyet letörölhetünk és helyére a megmaradt két szám összegénél 1-gyel kisebb számot írhatunk. Néhány lépés után a táblán ez a három szám áll: 17, 75, 91. Lehetett-e a kiinduló számhármas

a) 2, 2, 2; és

b) 3, 3, 3?

Szabó Magda (Szabadka)

6. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja H. A H pont tükörképe A-ra H_1, B-re H_2. A CH_1 és AD

egyenesek metszéspontja E, a DH_2 és BC egyenesek metszéspontja F, végül a CH_1 és DH_2 egyenesek metszéspontja M. Hányad része az $ABCD$ négyzet területének a DEM és CFM háromszögek területének összege?

Bíró Bálint (Eger)

11. osztály

1. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = \\ = 2xyz(x^2y+y^2z+z^2x).$$

Árokszállási Tibor (Paks)

2. Tegyük fel, hogy az ABC hegyesszögű háromszögben $AB > AC$ és jelölje a háromszög köré írt kör középpontját O. Az A csúcsból húzott magasságvonal a BO egyenest az E, a CO egyenest az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AE \cdot AF = BE \cdot CF$!

Ábrahám Kinga (Sopron)
Csorba Ferenc (Győr)

3. Jelölje $M(a)$ az egész számegyenesen értelmezett

$$f_a(x) = \left| a + \cos 2x + \frac{1}{2+\cos^2 x} \right|$$

(a tetszőleges valós szám) függvény maximumát. Határozzuk meg az $M(a)$ számok minimumát!

Dáné Károly (Marosvásárhely)

4. Igazoljuk, hogy ha $n > 3$ egész szám, akkor

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2^n - 1) - 1$$

osztható 2^n-nel!

Bencze Mihály (Brassó)

5. Jelölje egy trapéz két párhuzamos oldalának hosszát a és c, a két szárának hosszát b és d, a két átlójának hosszát pedig e és f ($a \geq c$, $d \geq b$, $f \geq e$). Igazoljuk, hogy

$$d^2 - b^2 = (a-c)\frac{f^2-e^2}{a+c}.$$

Kántor Sándor (Debrecen)

6. Igazoljuk, hogy ha $n > 2$ egész szám, akkor $n+1$ tetszőlegesen választott valós szám között mindig van kettő, jelölje ezeket x és y, amelyekre igaz, hogy

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Lovász Gabriella (Csallóközaranyos)

12. osztály

1. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert:

$$4xy(x^2-y^2) = -1,$$
$$x^2+y^2 = 1.$$

Katz Sándor (Bonyhád)

2. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlói az O pontban metszik egymást, tegyük fel, hogy $DO > BO$. Legyen P az OD szakasznak az a pontja, amelyre $2 \cdot DP^2 = DO \cdot DB$ teljesül. Igazoljuk, hogy a P ponton át az AC átlóval párhuzamosan húzott egyenes a négyszöget két egyenlő területű részre bontja!

Szász Róbert (Marosvásárhely)

3. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$, egész szám, akkor

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \\ = \frac{1}{3}(4(1+2+3+\ldots+n)^3 - \\ - (1+2+3+\ldots+n)^2).$$

Bencze Mihály (Brassó)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$ valós számok ($n > 1$), akkor

$$\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1^4+x_2^4} + \frac{x_2^3-x_3^3}{x_2^4+x_3^4} + \ldots + \frac{x_{n-1}^3-x_n^3}{x_{n-1}^4+x_n^4} < \\ < \frac{3}{2} \cdot \frac{x_1-x_n}{x_1 x_n}.$$

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

5. Igazoljuk, hogy ha $p(x)$ egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom és x_1, x_2, ..., x_n ($n \geq 3$) különböző egész számok, akkor a következő egyenlőségek nem lehetnek egyszerre igazak:

$$p(x_1) = x_2;\ p(x_2) = x_3;\ \ldots;\ p(x_n) = x_1.$$

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

6. Az A_1, A_2, A_3, ..., A_n pontok egy körvonalon helyezkednek el. Hányféleképpen lehet legfeljebb 100 szín felhasználásával kiszínezni a pontokat úgy, hogy a szomszédos pontok különböző színűek legyenek?

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

A XXIX. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5-8. osztály)

Ötödik osztály

1. A ház körüli veteményeskertet az apa egyedül 2 óra alatt tudja felásni. Bence, a nagyobbik fiú egyedül 3 óra alatt, Csaba, a kisebbik fiú egyedül 6 óra alatt ásná fel. Mennyi ideig tart a munka, ha mindhárman együtt dolgoznak?

2. Egy matematikaversenyen, ahol 10 ötödik osztályos vett részt, 5 feladatot kellett megoldani. A versenyzők összesen 35 feladatmegoldást adtak be. Tudjuk, hogy volt olyan versenyző, aki csak 1, volt olyan, aki 2 és volt olyan is, aki 3 feladat megoldását adta be. Mutassuk meg, hogy volt olyan versenyző is, aki mind az öt kitűzött feladatot megoldotta! (Részletes indoklást írj!)

3. Szét lehet-e vágni egy kockát 20 kisebb kockára, és 50-re? Ha igen, hogyan?

4. Előfordulhat-e hogy egy évben semelyik hónap első napja sem vasárnap? (Válaszodat indokoljad meg!)

Az 5. osztály feladatainak megoldása:

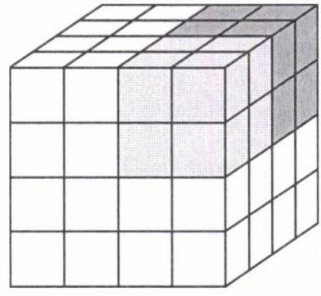
1. Egy óra alatt az apa a kert $\frac{1}{2}$ részét, Bence, a nagyobbik fiú, a kert $\frac{1}{3}$ részét, Csaba, a kisebbik fiú az $\frac{1}{6}$ részét ássa fel. Így hárman együtt 1 óra alatt a kert

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

részét, tehát az egészet felássák.

2. Az a három versenyző, aki csak 1, 2, illetve 3 feladatmegoldást adott be, összesen együtt 6 feladatmegoldást adott be. A többi 7 versenyző tehát együtt 29 feladatmegoldást adott be. Ha a 7 közül mindenki csak 4 feladat megoldását adta volna be, akkor összesen csak $4 \cdot 7 = 28$ feladatmegoldást adtak volna be. Ezért volt legalább egy versenyző, aki mind az öt feladat megoldását beadta.

3. A nagyobb kockát az éleit harmadoló, a lapokkal párhuzamos síkokkal 27 egybevágó (egyforma) kis kockára bonthatjuk. Ezek közül 8, egymáshoz csatlakozó kis kockát „összeragasztunk". Így a kockát éppen 20 kisebb kockára vágjuk szét.



A nagyobb kockát először az éleit negyedelő; a lapokkal párhuzamos síkokkal 64 egybevágó (egyforma) kis kockára bontjuk, majd például két szomszédos (egy él végpontját képező) csúcsnál 8-8 egymáshoz csatlakozó kis kockát „összeragasztunk". Így összesen 50 kisebb kockánk lesz.

4. Készítsünk táblázatot, ahol megjelöljük, hogy a hét melyik napja a hónap első napja. Tegyük fel, hogy nem szökőévről van szó, és január elseje hétfő. Ekkor az egyes hónapok első napja a következő lesz:

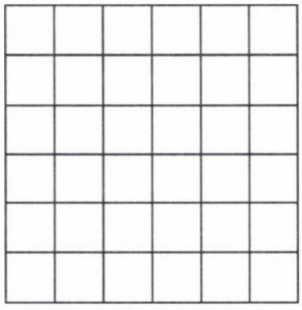
jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.
h.	cs.	cs.	v.	k.	p.
júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
v.	sze.	szo.	h.	cs.	szo.

Látható, hogy a hét minden napja előfordul a hónapok első napjai közt. Így, ha nem hétfő a január elseje, akkor minden kezdőnap ugyanannyival tolódik el, tehát szintén a hét minden napja előfordul hónapkezdő napként, tehát a vasárnap is. Szökőévben teljesen hasonló a helyzet.

Hatodik osztály

1. Felírtuk az egész számokat 1-től 23-ig egy-egy lapra. Adél két csoportra akarja bontani a lapokat úgy, hogy az egyikbe tartozó lapokra írt számok összege 21-gyel legyen nagyobb, mint a másik csoportba tartozókra írt számok összege. Elvégezhető-e ez a csoportosítás?

2. Az ábrán látható 6×6-os táblázaton hány téglalap látható? (A négyzet is téglalap!)



3. Adott a síkon 6 pont úgy, hogy nincs mind egy egyenesen. Legalább hány egyenest határoz meg a 6 pont? Legfeljebb hány egyenest határoz meg a 6 pont? (Egy egyenest akkor határoznak meg az adott pontok, ha az egyenesre legalább két adott pont illeszkedik.)

4. A két unoka életkora a nagymama életkorának két számjegyével egyenlő. Hármuk életkorának összege 72 év. Hány évesek külön-külön?

A 6. osztály feladatainak megoldása:

1. Felírtuk az egész számokat 1-től 23-ig egy-egy lapra. Ezek összege:

$$1+2+3+\ldots+22+23=\frac{23(23+1)}{2}=276.$$

Ha a kívánt csoportosítást el lehet végezni, akkor jelöljük a kisebb összegű csoportba tartozó számok összegét x-szel, a másik csoportba tartozó számok összege ekkor $x+21$. A feltevés szerint

$$x+x+21=276,$$

amiből

$$2x=255$$

következik.

Ez azonban nem lehet, mert x egész szám, így $2x$ páros szám, 255 pedig páratlan. A csoportosítás tehát nem lehetséges.

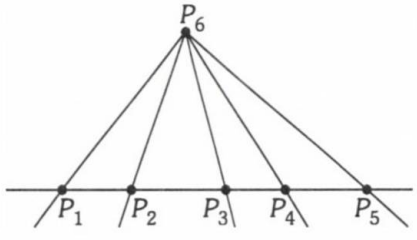
2. Minden téglalapot úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk a négyzet két-két oldalának párhuzamos oldalpárjait.

A „függőleges" oldalpárokat 7 egyenes közül választhatjuk ki, 7-ből 2 egyenest

$$\frac{7\cdot 6}{2}=21$$

módon lehet kiválasztani. Ugyancsak 21-féle módon választható ki a téglalap két „vízszintes" oldala. Összesen tehát $21 \cdot 21 = 441$ téglalap látható az ábrán.

3. A lehető legtöbb egyenest nyilván akkor határozza meg a 6 pont, ha semelyik 3 pont nincs egy egyenesen, azaz például a 6 pont egy konvex hatszög hat csúcsa. Ekkor az egyenesek száma (a hatszög oldalai és átlói): 15. A lehető legkevesebb egyenest akkor kapjuk, ha 5 pont egy egyenesen van, csak a hatodik pont nincs rajta ezen az egyenesen. Ekkor a pontok 6 egyenest határoznak meg.



4. Ha nagymama életkora $10x+y$, akkor a két unoka életkora x és y. A feltétel szerint

$$10x+y+x+y=72,$$

azaz

$$11x+2y=72.$$

Ebből látható, hogy x páros szám, és 8-nál kisebb, de 4-nél nagyobb, tehát

$$x=6$$

és így

$$y = 3.$$

A nagymama tehát 63 éves, a két unoka 3 és 6 éves. $63 + 3 + 6 = 72$ kielégítik a feltételeket.

Hetedik osztály

1. Van-e olyan egész szám, amelynek a négyzete így írható: $1999^{2000} + 1$?

2. Egy háromjegyű tízes számrendszerbeli szám egyenlő a számjegyei összegének 15-szörösével. Melyik lehet ez a szám?

3. Egy paralelogramma egyik szöge 60°, két szomszédos oldala pedig 2 és 6 egység hosszúságú. Egy szabályos hatszög oldala 2 egység hosszú. Mekkora a hatszög és a paralelogramma területének aránya?

4. Hány 10 jegyű szám készíthető csupa 1-es és 2-es számjegyekből, ha kikötjük, hogy két 2-es számjegy nem lehet szomszédos?

5. Az AB szakaszt a C és D pontok három egyenlő részre bontják. A CD szakasz fölé egy CDO szabályos háromszöget szerkesztettünk. Az O középpontú, $OA = OB$ sugarú kör az OC félegyenest a P pontban metszi. Számítsuk ki az APB háromszög szögeit!

A 7. osztály feladatainak megoldása:

1. Az 1999 szám egymást követő hatványai felváltva 9-re és 1-re végződnek, tehát az 1999^{2000} szám utolsó számjegye 1. Ha ehhez a számhoz 1-et adunk, 2-re végződő számot kapunk.
Ugyanakkor egy egész szám négyzetének utolsó számjegye csak 0, 1, 4, 5, 6, 9 lehet.
Az $1999^{2000} + 1$ tehát nem lehet egy egész szám négyzete.

2. Jelölje a keresett háromjegyű szám számjegyeit a, b és c ($a \neq 0$). A feltétel szerint:

$$100a + 10b + c = 15(a + b + c).$$

Ebből:

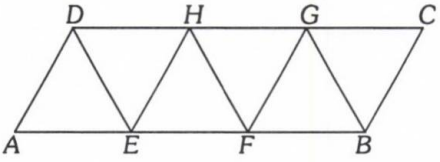
$$85a = 5b + 14c, \qquad (1)$$

ami átrendezve

$$85a - 5b = 14c.$$

Itt a bal oldal osztható 5-tel, tehát a jobb oldal is, így c osztható 5-tel, azaz $c = 0$ vagy $c = 5$.
De $c = 0$ nem lehet, mert akkor (1)-ből $17a = b$ adódna, és mivel $a \neq 0$, b-nek legalább 17-nek kellene lenni.
Tehát $c = 5$ és így (1)-ből $17a = b + 14$.
Mivel $b \leq 9$, a csak 1 lehet, és $b = 3$.
A 135 jó, mert $135 = 15(1 + 3 + 5)$.

3. Az $ABCD$ paralelogramma 6 egységnyi hosszúságú oldalait az E, F és H, G pontok 3-3 egyenlő részre bontják. Az EH és FG szakaszok a paralelogrammát 3 olyan rombuszra vágják szét, amelyeknek oldala 2 egység, hegyesszöge 60°.



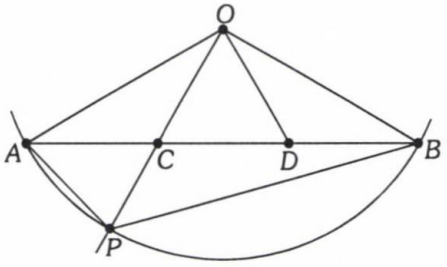
Ezeknek a rombuszoknak a rövidebb átlóit (ED, FH, BG) meghúzva, hat egybevágó, 2 egység oldalú szabályos háromszöget kapunk.
A szabályos hatszög a szemközti csúcsokat összekötő 3 átlóval szintén feldarabolható hat ilyen háromszögre.
A paralelogramma és a rombusz területe tehát egyenlő, területük aránya 1.

4. Először számoljuk össze, hogy hány egy-, kettő-, háromjegyű szám készíthető a megadott feltételekkel:
egyjegyűek: 1, 2,
kétjegyűek: 11, 12, 21,
háromjegyűek: 111, 121, 211, 112, 212
Megfigyelhető, hogy a kétjegyűekből úgy képezhetünk háromjegyűeket, hogy mindegyik után 1-est írunk, az egyjegyűekből pedig úgy, hogy mindegyik végére egy 1-est és egy 2-est írunk. Így minden szóbajöhető háromjegyű számot megkapunk.
Ez a képzési szabály tovább folytatható, tehát a tízjegyűekig a számok száma sorra:

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Tehát összesen 144 adott tulajdonságú tízjegyű szám képezhető.

5. Az adott feltételek miatt az ábrán az AOP és POB háromszögek egyenlő szárúak. Mivel ACO és BDO is 120°-os csúcsszögű egyenlő szárú háromszögek, $AOC\sphericalangle = BOD\sphericalangle = 30°$, és $CAO\sphericalangle = DBO\sphericalangle = 30°$. Így $OAP\sphericalangle = OPA\sphericalangle = 75°$, tehát $BAP\sphericalangle = 45°$. $POB\sphericalangle = 90°$, így $OBP\sphericalangle = OPB\sphericalangle = 45°$, tehát $ABP\sphericalangle = 15°$. Végül $APB\sphericalangle = 120°$. Az APB háromszög szögei tehát 45°, 120°, 15°.



Nyolcadik osztály

1. 1331 egy egész szám harmadik hatványa, más néven köbszám. Mutassuk meg, hogy akkor is köbszámot kapunk, ha az 1331 két-két szomszédos számjegye közé akárhány, de azonos számú 0-t írunk! (Például: 1003003001)

2. Valaki három különböző, nem 0 számjegyből elkészítette az összes, különböző számjegyekből álló háromjegyű számot, majd a kapott számokat összeadta. Kiderült, hogy az összeg két szomszédos egész szám szorzata. Melyek lehettek a kiinduló számjegyek?

3. Egy folyó partján egy téglalap alakú területet akarnak bekeríteni 100 m hosszú kerítéssel (csak a téglalap 3 oldalára kell kerítés). Hogyan válasszák a téglalap méreteit, hogy a területe a lehető legnagyobb legyen?

4. Az n pozitív egész szám mely értékeire igaz, hogy az $n^2 + 4n - 5$ egy egész szám négyzete?

5. Egy adott e egyenes egyik oldalán a P 5 egység, a Q 3 egység távolságra van e-től. A P-ből e-re állított merőleges talppontja R, a Q-ból e-re állított merőleges talppontja S. A PS és QR szakaszok metszéspontja O. Milyen messze van O az e egyenestől?

A 8. osztály feladatainak megoldása:

1. $1331 = 11^3$.

Ha az 1030301 számot vizsgáljuk, akkor azt találjuk, hogy $101^3 = 1030301$. Ezek alapján azt sejtjük, hogy $(10^n + 1)^3 = 10...030...030...01$, ahol az egyenlőség jobb oldalán álló szám az 1331 számból úgy keletkezett, hogy két-két szomszédos számjegye közé $n - 1$ darab 0-t írtunk.

A sejtést a köbre emelés elvégzésével (például szorzással) lehet igazolni:

$$(10^n + 1)^3 = 10^{3n} + 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n + 1.$$

2. Legyen a három, egymástól és a 0-tól is különböző számjegy a, b, c. Ekkor az a, b, c számjegyekkel felírható, különböző számjegyekből álló háromjegyű számok összege:

$$222(a + b + c).$$

Mivel a, b, c különbözők és 0-nál nagyobbak, legkisebb értékük 1, 2, 3, legnagyobb értékük 7, 8, 9 lehet, így

$$6 \le (a + b + c) \le 24,$$

A $222 = 6 \cdot 37$, ahol 37 prímszám, így

$$222(a + b + c) = 6(a + b + c) \cdot 37$$

alakban írható. Ez két szomszédos egész szám szorzata csak akkor lehet, ha vagy

$$6(a + b + c) = 36,$$

azaz

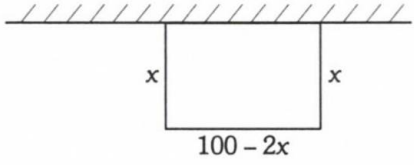
$$a + b + c = 6$$

és így a, b, c az 1, 2, 3 számjegyek (valamilyen sorrendben), vagy

$$3(a + b + c) = 75$$

(a másik tényező $2 \cdot 37 = 74$), de ekkor $a + b + c = 25$, ami nem lehet.

3. Az ábrán látható jelölésekkel a téglalap területe: $t = x(100 - 2x)$.



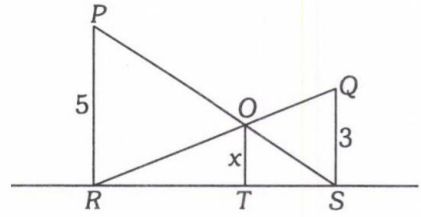
Ezt a kifejezést így alakíthatjuk át:

$$x(100 - 2x) = 2(50x - x^2) = 2(625 - (x - 25)^2).$$

Mivel $(x-25)^2 \geq 0$ és csak $x = 25$ esetén 0, a terület akkor a legnagyobb, ha $x = 25$. A legnagyobb területet tehát akkor kapjuk, ha a téglalap oldalai 25 és 50 méteresek, akkor a téglalap területe 1250 m^2.

4. Ha $n = 1$, akkor $n^2 + 4n - 5 = 0$, ami 0-nak a négyzete, tehát $n = 1$ megfelelő. Ha $n > 1$, akkor $n^2 < n^2 + 4n - 5 < (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$.
Így $n^2 + 4n - 5$ csak akkor lehet egy egész szám négyzete, ha $(n+1)^2$-nel egyenlő. Ebből következik, hogy $n = 3$. Ekkor $n^2 + 4n - 5 = 16 = 4^2$, tehát az $n = 3$ megfelelő még. Más megoldás nincs.

5. Jelölje az O-ból e-re állított merőleges talppontját T, $OT = x$. Mivel a PRS és OTS, valamint a QSR és OTR derékszögű háromszögek hasonlók, befogóik aránya egyenlő.



Ennek alapján felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\frac{RS}{5} = \frac{TS}{x}, \quad \frac{RS}{3} = \frac{RT}{x}.$$

A két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva ezt kapjuk:

$$\frac{RS}{5} + \frac{RS}{3} = \frac{RS}{x}.$$

Mivel $RS > 0$, mindkét oldalt elosztjuk vele, és a kapott egyenletből: $x = \frac{15}{8}$.

Ericsson-díj tanároknak

Az Ericsson cég magyarországi Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által tavaly alapított díjat általános és középiskolai fizika- és matematikatanárok nyerhetik el, az alább részletezett feltételek szerint. A díjalapítás célja, hogy támogassa és erősítse a magyarországi természettudományos alapképzés világviszonylatban is kiemelkedő színvonalát, igényességét. Ennek köszönhető ugyanis, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képvisel az igényes hazai és külföldi befektetők előtt, és vonzóvá teszi Magyarország bekapcsolását a távközlés és egyéb csúcstechnológiák nemzetközi kutatási fejlesztési láncába.

Az ERICSSON-DÍJAKAT minden évben két kategóriában ítélik oda általános iskolában, szakközépiskolában, gimnáziumban, illetve speciális matematika vagy fizika tagozaton tanító tanárok körében, 2000-ben a következő kiírás alapján.

1. „Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért" díj

4 matematika- és 4 fizikatanár részére egyenként 200 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akiknek tanítványai a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok versenyein, vagy a Varga Tamás, Arany Dániel matematikaversenyek, matematika vagy fizika OKTV, Öveges József, Mikola Sándor, Fényes Imre, Szilárd Leó fizikaversenyek, a Nemzetközi Matematika vagy Fizika Diákolimpiák, a Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy az Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén az 1996-97-es tanévtől kezdődően I-III.díjat nyertek.

2. „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért" díj

4 matematika- és 4 fizikatanár részére egyenként 150 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akik tanítványaikkal az 1999-2000. tanévben aktívan bekapcsolódtak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok pontversenyeibe (korábban iskolájából egyáltalán nem vagy csak csekély eredménnyel versenyeztek a tanulók), vagy évek óta elismerten a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson díjbizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok. A javaslatokat legkésőbb 2000. október 1-jéig kell eljuttatni a Bolyai János Matematikai Társulathoz vagy az Eötvös Loránd Fizikai Társulathoz, mindkettő címe: **1027 Budapest, Fő u. 68.**

A bizottságok a beérkezett javaslatok és a versenyek eredményei alapján teszik meg ajánlásaikat a díjazottakra **2000. november 1-jéig.**

Kocsis Orsolya

Logikai műveletek a természetes számok halmazán

A konjunkció, diszjunkció, negáció műveleteket nagyon sokan ismerik, s el is tudják végezni az igaz, hamis állításokkal vagy kettes számrendszerben a 0 és 1 számjegyekkel. Léteznek azonban zsebszámológépek (pld. SHARP-5120 TI-89 típusú), melyek más számrendszerben is elvégzik a következő szabály szerint. A gép automatikusan átváltja a beírt számokat bináris számrendszerbe és így végrehajtja a kijelölt műveletet. A kapott eredményt visszaalakítja a használt számrendszerbe, s megjeleníti azt. Így pld. $22 \wedge 7 = 6$, mivel $22 = 10110_2$ és $7 = 111_2$. A kisebb szám magasabb helyi értékeit helypótló nullákkal kiegészítjük, s számjegyenként végrehajtjuk a konjunkciót: $10110 \wedge 00111 = 00110$ és $00110_2 = 6$. Ehhez hasonlóan $22 \vee 7 = 23$.

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy ha a legismertebb logikai műveleteket a fenti módon természetes számokon hajtjuk végre, akkor milyen új műveleti tulajdonságokat figyelhetünk meg.

I. Konjunkció

A konjunkció kommutatív és asszociatív tulajdonsága továbbra is érvényben marad, ezenkívül a következő tulajdonságokat igazoljuk:

1. Bármely $n, m \in \mathbb{N}$-re $n \wedge m \leq \min(n, m)$.

Tekintsük az n és m számok bináris alakjait! A kisebb szám magasabb helyi értékeit helypótló nullákkal egészítjük ki, hogy a két szám számjegyeinek száma megegyezzen. A kettes számrendszerbeli számolási szabályokból következik, hogy a konjunkció eredményében ezeken a helyeken csak 0 szerepelhet, így $n \wedge m$ értéke nem lehet nagyobb a kisebb számnál.

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n \wedge 0 = 0$.

Az n számot kettes számrendszerbe átírva számjegyenként mindenütt 0-val elvégezve a konjunkciót kapjuk, hogy $n \wedge 0$ minden számjegye csak 0 lehet.

3. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$n \wedge 1 = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Ezen állításunkat egyszerűen igazolhatjuk, ha ismét bináris számrendszerben gondolkodunk, ahol páros számok 0-ra, páratlan számok pedig 1-re végződnek. Az 1 számban a magasabb helyi értéken álló jegyeket 0-val kiegészítve, s számjegyenként elvégezve a konjunkciót adódik az állítás.

4. Legyen n_0 rögzített, m pedig tetszőleges természetes szám. Ekkor $n_0 \wedge m$ értékei periódikusan ismétlődnek és a periódus hossza: $p = 2^{[\log_2 n_0]+1}$, ahol $[x]$ jelenti x egészrészét, az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész számot.

Az 1. állításból következik, hogy $n_0 \wedge m$ csak véges sok értéket vehet fel, az 1, 2, ..., n_0 számokat. Mivel $[\log_2 n_0] + 1$ az n_0 szám bináris alakjában a számjegyek számát jelöli, így $n_0 \wedge m$ értéke csak az m szám utolsó $[\log_2 n_0] + 1$ jegyétől függ, s m növekedésével ezek a számjegyek és ezzel $n_0 \wedge m$ értékei ismétlődést mutatnak. Az ismétlődés akkor kezdődik először mikor m az a legkisebb szám, mely bináris alakjában az utolsó $[\log_2 n_0] + 1$ számjegy mindegyike 0, vagyis a periódus hossza: $p = 10...00_2 = 2^{[\log_2 n_0]+1}$.

A 4. állítás két speciális esete:

4/a $(2^k - 1) \wedge (2^k \cdot p + q) = q$, ha $k, p, q \in \mathbb{N}$.

$2^k - 1$ kettes számrendszerben k db egyesből álló szám, így bármely rögzített k-ra a fenti

konjunkció periódusa 2^k lesz, s az állításban szereplő értéknek csak az utolsó k számjegye tartalmazhat csak egyest és pontosan ott ahol $2^k \cdot p + q$ szám bináris alakjában is egyes áll. Így ha $2^k \cdot p + q$ befutja a természetes számok halmazát, akkor $(2^k - 1) \wedge (2^k \cdot p + q)$ is előbb a 0, 1, 2, ... természetes számokat veszi fel $2^k - 1$-ig, majd további növekedéssel ezen számértékek ismétlődnek.

4/b $(2^k) \wedge (2^{k+1} \cdot p + q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le q \le 2^k - 1 \\ 2^k, & \text{ha } 2^k \le q \le 2^{k+1} - 1 \end{cases}$

2^k bináris alakja egy $(k+1)$ jegyű szám, mely első számjegye 1, a többi pedig 0. Így bármely rögzített k-ra a fenti konjunkció periódusa 2^{k+1} lesz, értéke pedig a kettes számrendszerbeli műveleti tulajdonságok miatt csak 0 vagy 2^k lehet aszerint, hogy $2^k \cdot p + q$ bináris alakjában a 2^k helyi értéken 0 vagy 1 áll. Így ha 2^k konjunkció értékét vizsgáljuk a 0, 1, 2, ..., n_0 természetes számokkal, akkor $2^k \wedge n_0 = 0$, ha $n_0 \le 2^k - 1$ és $2^k \wedge n_0 = 1$, ha $2^k \le n_0 \le 2^{k+1} - 1$, s ezután n_0 növekedésével a 0 és 2^k számjegyek ismétlődése következik a fent említett szabály szerint.

II. Diszjunkció

A diszjunkció kommutatív, asszociatív tulajdonsága továbbra is érvényes marad, ezenkívül a következő állítások teljesülnek:

1. Ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor $n \vee m \le n + m$.

Tekintsük az n és m számok bináris alakjait! A kettes számrendszerbeli műveleti tulajdonságokból következik, hogy $n \vee m = n + m$ akkor teljesül, ha a bináris alakokban az azonos helyi értékeken:

a) mindkét számban 0 áll: $0 \vee 0 = 0 + 0 = 0$

b) ellentétes számjegyek állnak: $0 \vee 1 = 0 + 1 = 1$

Ha az azonos helyi értékeken mindkét számban egyes szerepel, akkor a diszjunkció eredménye kisebb az összegnél: $1 \vee 1 = 1 < 1 + 1 = 10$.

2. A kettes számrendszerbeli számolási szabályok általánosításaként adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra: $n \vee 0 = n$.

Ezt így igazoljuk: $n \vee 0$ bináris alakjában csak ott állhat 1-es számjegy, ahol az n szám kettes számrendszerbeli alakjában egyes áll, a többi helyen pedig 0 fog szerepelni.

3. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra:

$$n \vee 1 = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ n+1, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

Az előző két állításból következik, hogy $n \vee 1$ kettes számrendszerbeli alakja az utolsó számjegy kivételével az n szám bináris alakjával egyezik meg. Ha n páratlan, kettes számrendszerbeli alakja 1-re végződik, így n, illetve $n \vee 1$ utolsó számjegye is megegyezik. Ha n páros, vagyis bináris alakja 0-ra végződik, akkor az 1-gyel vett diszjunkció értéke 1 lesz, így $n \vee 1$ bináris alakja annyiban különbözik az n szám bináris alakjától, hogy az utolsó számjegy nem 0, hanem 1 lesz, vagyis a diszjunkció eredménye 1-gyel lesz több, mint maga a szám.

4. Legyen n_0 rögzített természetes és $m \le 2^{[\log_2 n_0]+1} - 1$ természetes szám. Ekkor, ha $n_0 \vee m = k$, akkor

$$n_0 \vee m + p \cdot 2^{[\log_2 n_0]+1} = k + p \cdot 2^{[\log_2 n_0]+1}.$$

Jelölje n_0' az n_0 m' pedig az m szám számjegyeinek számát kettes számrendszerben. Korábban láttuk, hogy $n_0' = [\log_2 n_0] + 1$. Az állításban megfogalmazott feltétel azt jelenti, hogy $m' \le n_0'$. Hasonlítsuk össze m és $m + p \cdot 2^{[\log_2 n_0]+1}$ diszjunkciók eredményében is az utolsó n_0' darab számjegy azonos lesz. Azért, hogy a második diszjunkciót végre tudjuk hajtani, a kettes számrendszerbe való áttéréskor az n_0 szám magasabb helyi értékeit ($2^{n_0'-1}$-től felfelé) helypótló nullákkal egészítjük ki. Az első állítás *a)* és *b)* részéből pedig következik, hogy ezen helyi értékeken a diszjunkció eredménye az összeadás eredményével egyezik meg. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Speciális eset:

$$n \vee (2^k - 1) = 2^k - 1 + [n/2^k] \cdot 2^k$$

Kettes számrendszerben gondolkodva: $2^k - 1$ bináris alakja k db egyesből áll. Így valamely n számmal vett diszjunkció eredményé-

ben az utolsó k helyi értéken egyes számjegy áll, magasabb helyi értéken pedig az n szám számjegyeivel azonos értékek szerepelnek. S ha figyelembe vesszük, hogy $[n/2^k] \cdot 2^k$ bináris alakja az a szám, mely utolsó k számjegye 0, a többi számjegy pedig az n szám számjegyeivel egyezik meg, akkor ezzel állításunkat igazoltuk.

III. Negáció

Ha a negáció műveletét a korábbi módon értelmezzük természetes számok halmazán, a következő probléma vetődik fel: Ha a vizsgált számokat átírjuk kettes számrendszerbe, hogyan vegyük figyelembe a magasabb helyi értékeken szereplő helypótló nullákat? Pld. 5 negáltjára más-más értéket kaphatunk attól függően, hogy bináris alakjának az 101, 0101, 00101, ... stb. számok közül melyiket tekintjük? Konjunkciónál, diszjunkciónál ez azért nem okozott problémát, mert ha a szám elé (bináris számrendszerben) tetszőleges számú nullát írunk, s elvégezzük a műveleteket – mivel $0 \vee 0 = 0$ és $0 \wedge 0 = 0$ – akkor a végeredmény magasabb helyi értékein is csak 0-k szerepelhetnek, így nem befolyásolja annak értékét.

Ennek figyelembe vételével a negáció általánosításánál két esetet különböztetünk meg.

1. Első megközelítésben tegyük azt a kikötést, hogy bármely n_0 természetes számra n_0 és $\neg n_0$ bináris alakjában a számjegyek száma egyezzen meg, ez az érték $[\log_2 n_0] + 1$. Ha kettes számrendszerben gondolkodunk és összeadjuk n_0 és $\neg n_0$ számokat, akkor mivel minden helyi értéken ellentétes számjegyek szerepelnek, az összeg $[\log_2 n_0] + 1$ db egyest fog tartalmazni, melynek értéke tízes számrendszerben: $2^{[\log_2 n_0]+1} - 1$.

Így $n + \neg n = 2^{[\log_2 n_0]+1} - 1$.

Ezzel a következő állítást igazoltuk:

Ha a fenti módon általánosítjuk a negáció fogalmát, akkor bármely n természetes szám negáltját a $\neg n = 2^{[\log_2 n_0]+1} - 1$ -n képlettel számíthatjuk ki.

2. Második megközelítésben a számítógépek működésének elvét vegyük figyelembe. Tudnunk kell, hogy e gépek valamennyi adatot kettes számrendszerbe (kétállapotú jelek sorozatává) alakítanak át. A kettes számrendszerbeli szám egy számjegyét egy bitnek nevezzük, ez a gépen tárolt információ legkisebb egysége. Az adatok ábrázolására csak meghatározott nagyságú hely, memória áll rendelkezésre. A bináris szám legelső számjegyét előjel bitnek nevezzük, ez negaív számok esetén 1, s tízes számrendszerre való áttérés esetén negatív előjellel vesszük figyelembe, pozitív számoké pedig 0.

Ezek figyelembevételével a negáció műveletének elvégzésére nézzünk egy konkrét példát!

Tegyük fel, hogy gépünkön az adatok ábrázolására 8 bit memória áll rendelkezésre. Mennyi lesz $\neg 54$?

Mivel

$$54_2 = 00110110,$$
$$\neg 54 = \neg 00110110 = 11001001$$

s ez a tízes szmrendszerben:

$$\neg 54 = -128 + 64 + 8 + 1 = -55.$$

Látható, hogy 8 bit memória hely esetén -128 és 127 közötti számok ábrázolására van lehetőség.

A fentieket a következőkben így általánosíthatjuk:

Általában, ha gépünkön k bit memória áll rendelkezésre az adatok tárolására, akkor -2^{k-1} és $2^{k-1} - 1$ közötti egész számok ábrázolására van lehetőség, s igaz most is, hogy $n + \neg n$ bináris alakja k db egyesből áll, de ha az első számjegyet negatív előjellel kell figyelembe venni.

Visszatérve tízes számrendszerbe:

$$n + \neg n = -2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2 + 1 =$$
$$= -2^{k-1} + 2^{k-1} - 1.$$

Ebből: $n + \neg n = -1$.

Ezzel a következő állítást láttuk be. Ha számítógépünkön k bit memória áll rendelkezésre az adatok tárolására, akkor $\forall z \in [-2^{k-1}; 2^{k-1}]$ szám negáltját a $\neg z = -1 - z$ képlettel számíthatjuk ki, melyet az adott szám egyes komplemensének nevezünk. Ha ehhez az értékhez egyet hozzáadunk, akkor a szám közönséges értelemben vett ellentettjét kapjuk meg, melyet szakirodalomban a szám kettes komplemensének nevezznek.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 2000. augusztus 31.**

150. Melyek azok a pozitív racionális számok, amelyek törtrésze megegyezik reciprokuk törtrészével?

Kondor László, Dunaújváros

151. 2000-rel kezdődően legalább hány egymást követő pozitív egész számot kell összeszoroznunk, hogy a szorzat pontosan 2000 darab 0-ra végződjön?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

152. Az $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$ egyenletnek az $[1; 2]$ intervallumban pontosan 1 valós gyöke van, jelöljük ezt α_n-nel. Igazoljuk, hogy az $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét!

Bencze Mihály, Brassó

153. Egy szabályos tizenkétszög egymás után következő csúcsai A_1, A_2, ..., A_{12}. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{A_1A_2^2} + \frac{1}{A_1A_6^2} = \frac{4}{A_1A_3^2}$!!

154. Határozzuk meg az $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, $f(n) = \left[n + \sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$ függvény értékkészletét! ($[x]$ jelöli az x szám alsó egészrészét.)

Feladatmegoldások (135-139. feladatok)

135. Mutassuk meg, hogy bármely 79 egymást követő természetes szám között van legalább egy olyan, amelyben a számjegyek összege osztható 13-mal! Igaz-e ugyanez 78 egymást követő természetes számra?

Megoldás: Nevezzünk egy természetes számot *enyhén szerencsétlen*nek, ha számjegyeinek összege osztható 13-mal, egyébként *normális*nak. Ha a enyhén szerencsétlen és $x \cdot 10^n < a < (x+1) \cdot 10^n$ $(0 < x < 9;\ x, n \in \mathbb{N})$, akkor $a + 49$ is az, amennyiben $x \cdot 10^n < a + 49 < (x+1) \cdot 10^n$ is fennáll (azaz nem történt „100-as átlépés"). 1-től 48-ig nincs enyhén szerencsétlen szám, hasonlóan 10^n -től $10^n + 38$-ig sem. Ez utóbbi esetben tehát találtunk 39 egymást követő normális számot. Azt kell még megnéznünk, hogy a 10^n-nél kisebb számok között mennyi lehet az egymást követő normális számok számának maximuma.

Legyen $100a + b$ enyhén szerencsétlen ($a \in \mathbb{N}$; b kétjegyű természetes szám). Vizsgáljuk meg, mennyi lehet a „100-as átlépésig" a normális számok számának maximuma. $(100a + b) + 49$ esetén nincs „100-as átlépés", ha $b + 49 < 100$, azaz $b < 51$. $b \geq 51$ esetén b helyére rendre például a 60, 70, 80, 90, 64, 65, 75, 85, 95 számokat írva ismét enyhén szerencsétlen számot kapunk. Ha $b = 60$, akkor a „100-as átlépésig" legfeljebb 39 normális számot, a 10^n és $10^n + 39$ közöttiekkel együtt maximálisan 78-at találhatunk. Tehát 79 egymást követő természetes szám között már biztosan van enyhén szerencsétlen.

78 egymást követő természetes számra ez már nem igaz, mint arról például a 9999999961-től 10000000038-ig terjedő 78 természetes szám meggyőz. Könnyen látható, hogy végtelen sokszor előfordul 78 normális szám egymás után.

Csorba János és Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 7.

136. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$a_1 = 1 \text{ és}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}), \text{ ha } n > 1.$$

Határozzuk meg az a_{1999} értékét!

Megoldás: Legyen $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. Ezzel $a_n = S_n - S_{n-1}$ és a rekurzív formula alapján $S_n - S_{n-1} = \frac{n+1}{n-1} \cdot S_{n-1}$. Ebből

$$(n-1)S_n = 2nS_{n-1} \qquad (1)$$

minden $n > 1$ esetén. (1)-be rendre behelyettesítve a 2, 3, ..., n értékeket, majd a kapott egyenlőségeket összeszorozva kapjuk, hogy

$$(n-1)! \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot \ldots \cdot S_{n-1} \cdot S_n = \\ = 2^{n-1} \cdot n! \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_{n-1}.$$

Ebből, figyelembe véve, hogy minden részletösszeg pozitív, adódik, hogy

$$S_n = n \cdot 2^{n-1}. \qquad (2)$$

Így

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-2} = \\ = (n+1) \cdot 2^{n-2} \qquad (3)$$

minden pozitív egész n esetén, ahonnan $a_{1999} = 2000 \cdot 2^{1997}$.

Megjegyzés: (2) és (3) teljes indukcióval könnyen igazolható.

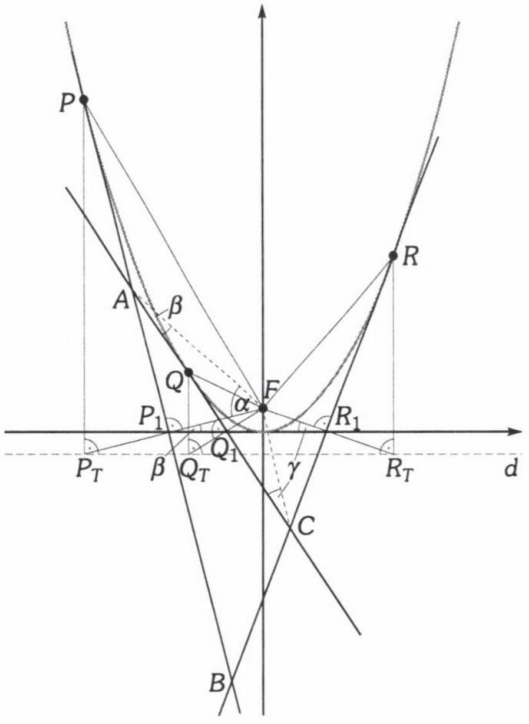
Tamási Csaba, Csíkszereda

A megoldók száma: 14.

137. Tekintsük egy adott parabola három tetszőlegesen választott érintőjét! Bizonyítsuk be, hogy a három érintő által közrefogott háromszög köréírt köre illeszkedik a parabola fókuszpontjára!

I. megoldás: Legyenek a parabola P, Q, R pontjaiból a d vezéregyenesre bocsátott merőlegesek talppontjai P_T, Q_T, R_T. (*1. ábra*)

A parabola érintőjének azt a tulajdonságát fogjuk felhasználni, hogy például a P-beli érintő merőlegesen felezi az FP_T szakaszt (ahol F a parabola fókuszpontja), azaz a P-beli érintő nem más, mint a P_TFP egyenlő szárú háromszög PF és PP_T szárai által meghatározott belső szög szögfelezője. (A Q-beli és R-beli érintőre hasonló összefüggés érvényes.)



1. ábra

Legyen a szögfelezők által közrefogott háromszög az ABC háromszög, az érintőknek a parabola csúcsérintőjével alkotott metszéspontjai P_1, Q_1, R_1, az AFP_1 szöget pedig jelölje α. Világos, hogy $P_1AF\sphericalangle = 90° - \alpha$.

Az AF szakasz a P_1 és a Q_1 pontokból derékszögben látszik, ezért az AFQ_1P_1 négyszög húrnégyszög. A kerületi szögek tétele értelmében ezért $Q_1AF\sphericalangle = Q_1P_1F\sphericalangle$. Jelölje ezt a szöget β. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy az R_1FQ_1C négyszög is húrnégyszög, és ezért $FR_1Q_1\sphericalangle = FCQ_1\sphericalangle$, legyen ez a szög γ. Mivel az AFC háromszög és a P_1FR_1 háromszög két-két szöge megegyezik, ezért ez a két háromszög hasonló. Az AFC háromszögben $AFC\sphericalangle = \alpha + P_1FC\sphericalangle$, a P_1FR_1 háromszögben $P_1FR_1\sphericalangle = P_1FC\sphericalangle + CFR_1\sphericalangle$. A hasonlóság miatt $AFC\sphericalangle = P_1FR_1\sphericalangle$, innen következik, hogy $CFR_1\sphericalangle = \alpha$, és így $FCR_1\sphericalangle = 90° - \alpha$, továbbá $FCB\sphericalangle = 90° + \alpha$, hiszen $FCR_1\sphericalangle + FCB\sphericalangle = 180°$. Az $ABCF$ négyszög két szemben levő szögének összege tehát 180°, vagyis az $ABCF$ négyszög húrnégyszög, ami az állítást bizonyítja.

Bíró Bálint, Eger

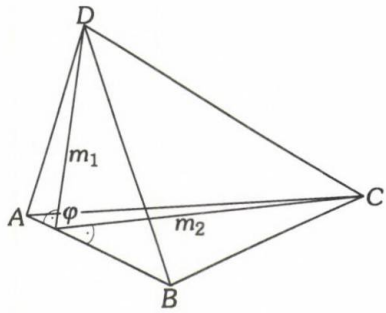
II. megoldás: (Több megoldó is hivatkozott arra, hogy *Hajós György Bevezetés a geometriába* című tankönyvének 439-440. oldalain megtalálható a feladatnak egy, az előzőtől lényegesen különböző megoldása. Ezt most vázlatosan ismertetjük.)

A parabola fókuszpontjából a tekintett érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjai illeszkednek a parabola csúcsérintőjére. Ebből a *Wallace-egyenesre* (*Simson-egyenes*) vonatkozó tétel értelmében adódik a feladat állítása. Ez utóbbi tétel: *A háromszög olodalegyeneseire egy pontból bocsátott merőlegesek talppontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha a pont illeszkedik a háromszög köré írt körre.*

A megoldók száma: 15.

138. Egy tetraédernek pontosan egy olyan éle van, amelynek hossza nagyobb 1-nél. Igazoljuk, hogy a tetraéder térfogata nem nagyobb $\frac{1}{8}$-nál!

Megoldás: Legyen a *2. ábrán* látható tetraéder leghosszabb éle CD (> 1), és vizsgáljuk az az ABC és ABD háromszögek síkjának φ szögét.



2. ábra

Ha φ nem 90°, akkor a teraéder térfogatát nem csökkentjük, ha az egyik lapot elforgatjuk úgy, hogy $\varphi = 90°$ legyen. Ekkor csak a CD él hossza változik, és ezzel a változtatással elérjük, hogy a teraéder magassága valamelyik háromszöglap magasságával lesz egyenlő. Ha az ABC és ABD háromszöget egyenlő szárúvá alakítjuk úgy, hogy AB, m_1 és m_2 változatlan hosszúságú maradjon, akkor a tetraéder térfogata nem változik, és könnyen látható, hogy ekkor a háromszögek szárainak hossza sem lesz nagyobb 1-nél. Ha a tekintett egyenlő szárú háromszögek szárai kisebbek 1-nél, akkor 1-re növelve őket a tetraéder térfogatát biztosan nem csökkentjük.

Ezekkel a módosításokkal olyan tetraédert kapunk, ahol $AD = BD = AC = BC = 1$, $\varphi = 90°$ és T felezi az AB élt. Ha $AB = x$, akkor a módosított tetraéder térfogata

$$V = \frac{1}{6} \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot x,$$

és mivel $m_1 = m_2 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, ezért

$$V = \frac{1}{24} x(4 - x^2).$$

Vizsgáljuk a továbbiakban az $x(4 - x^2)$ kifejezést a $0 < x \leq 1$ feltétel mellett. Azt kellene belátnunk, hogy $x(4 - x^2) \leq 3$. Mivel

$$4x - x^3 - 3 = (1 - x)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right] \leq 0,$$

és egyenlőség pontosan $x = 1$ esetén teljesül, ezért $V \leq \frac{1}{8}$, és az $\frac{1}{8}$ meg is valósulhat.

Be kell még látnunk, hogy a módosításokkal kapott esetben (a CD él kivételével minden él hossza egységnyi és $\varphi = 90°$) $CD > 1$. Ekkor $CD = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

László Sándor, Szombathely
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

Megjegyzés: A feladatot már 1967-ben kitűzték a Cetinjében megrendezett 9. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián. A megoldás megtalálható például: *Reiman István: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994.* (Typotex, Budapest, 1997.) 183-185. oldal, vagy *Molnár Emil: Matematikai Versenyfeladatok Gyűjteménye 1947-1970.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.) 364-367. oldal.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 11.

139. Határozzuk meg az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz azon $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ permutációinak a számát, amelyekre pontosan egy olyan $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ index létezik, hogy $a_i > a_{i+1}$ teljesül!

I. megoldás: Előbb egy rekurzív képletet adunk meg a tekintett permutációk számára. $n = 1$ esetén 0, $n = 2$ esetén 1 megfelelő permutáció van. Tegyük fel, hogy n-re s_n a megfelelő permutációk száma. Az $(n+1)$-edik szám, az $n+1$ nyilván $n+1$ helyen szerepelhet a számok permutációjában. Ha nem az $(n+1)$-edik helyen szerepel, akkor a feladat feltételét kielégítő inverzió már miatta lesz, tehát több nem lehet, azaz az $n+1$ előtt és után álló számok rendesen növekvő sorrendben kell, hogy legyenek. Ha az $n+1$ az i-edik helyen van ($i = 1, 2, ..., n$) akkor a megfelelő permutációk száma $\binom{n}{i-1}$. Így, ha az $n+1$ nem az utolsó helyen áll, akkor $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1} = 2^n - 1$ megfelelő permutáció van. Ha az $n+1$ az utolsó helyen van, akkor a megfelelő sorrendek száma s_n. A rekurzív képlet tehát

$$s_{n+1} = s_n + 2^n - 1.$$

Ezt a képletet felírva 1-től n-ig, majd ezeket összeadva, a mindkét oldalon szereplő tagok kiejtése után kapjuk, hogy

$$s_n = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\cdot 2^{i-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} n \cdot 2^{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 2^{i-1} = 2^n - n - 1.$$

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

II. megoldás: Ha $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ a feladat feltételének megfelelő permutáció, akkor $a_1 < a_2 < ... < a_i$ és $a_{i+1} < a_{i+2} < ... < a_n$.

Legyen $B_i \subset \{1, 2, ..., n\}$ egy $n - i$ elemű részhalmaz. Rendezzük növekvő sorrendbe a B_i és $\{1, 2, ..., n\} \setminus B_i$ halmazok elemeit: $B_i = \{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_n\}$, $\{1, 2, ..., n\} \setminus B_i = \{a_1, a_2, ..., a_i\}$.

Az $\{a_1, a_2, ..., a_i, a_{i+1}, ..., a_n\}$ permutáció a feladatnak megfelelő, ha $B_i \neq \{i+1, i+2, ..., n\}$. Különböző B_i halmazok különböző permutációkat származtatnak, és minden megfelelő permutáció meghatároz egy B_i részhalmazt, amelyre teljesül, hogy $B_i \neq \{i+1, i+2, ..., n\}$.

A megfelelő permutációk száma tehát egyenlő az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz azon részhalmazainak a számával, amelyek nem $\{i+1, i+2, ..., n\}$ alakúak. Ezen részhalmazok száma $2^n - n - 1$.

Szász Róbert, Marosvásárhely

A megoldók száma: 8.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (136-138.); Csorba Ferenc, Győr (135-138.); Dályay Pál Péter, Szeged (135., 136. 2 mód, 137., 138., 139. 2 mód); Fitos László, Esztergom (137.); László Sándor, Szombathely (136., 137. 2 mód, 138. 2 mód); Mészáros József, Galánta (135-138.); Molnár István, Gyula (136., 137., 139.); Schutzbach Mártonné, Siófok (136., 137.); Simon József, Csíkszereda (135-139.); Szász Róbert, Marosvásárhely (135-139.); Tamási Csaba, Csíkszereda (135., 136., 137. 2 mód, 138., 139.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (136. 2 mód, 137-139.); Ványa István, Szeged (136-138.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (135-139.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (136., 137., 139. 2 mód).

Több mint 250 feladat versenyekre készülő diákoknak

A feladatgyűjtemény a Kalmár László matematikaverseny 1994 és 1998 közötti megyei és országos fordulóinak feladatait valamint azok megoldásait tartalmazza. A kötet hasznos segítséget nyújthat a versenyekre való felkészüléshez tanárnak, diáknak egyaránt, de színesítheti a szakköri és a tanórai munkát is. Tanár szakos egyetemisták, főiskolások részére is ajánlható feladatösszeállítást tartalmaz.

Szép Magyar Könyv díjas tankönyvsorozat informatikából

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 470-101, 488-282
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73., Tel.: (62) 485-522

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERES
12

Egy alternatív bizonyítás a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esetére

(Csete Lajos)

Egy probléma megbeszélése matematika szakkörön (szakközépiskolásoknak)

(Mayer Zoltán)

A XXIX. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

(Urbán János)

VIII. ÉVFOLYAM 2000 **4**

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda Kft.-ben

TARTALOM

Egy alternatív bizonyítás a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esetére
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Egy-egy elemi szorzattá bontási feladat
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

A 2000. évi Beke Manó-emlékdíjasok

Egy probléma megbeszélése matematika szakkörön (szakközépiskolásoknak)
Mayer Zoltán tanár, Győr

Beszámoló a GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről
Pethőné Vendel Teréz – Bereczkiné Székely Erzsébet tanárnők, Pécs

A XXIX. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről
Urbán János tanár, Budapest

Két megjegyzés Kocsis Orsolya tanulmányához
Dr. Hack Frigyes ny. tanár, Budapest

Könyvajánló

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Csete Lajos

Egy alternatív bizonyítás a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esetére

Benedek Ilona tanárnő (Vác-Budapest), táborvezető jóvoltából 1997 nyarán a királyréti matematika-turisztika táborban volt szerencsém részt venni. Itt más tanárokkal együtt felvidéki, délvidéki, kárpátaljai és nagykanizsai magyar gyerekeket tanítottunk. A mi témánk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esete volt, és ennek alkalmazásai. Természetesen hagyományos bizonyításokkal érkeztem, ugyanis a tábor előtt hiába kerestem új bizonyítást. Egy ilyet csak ősszel, jóval a tábor után találtam. Azt nem állítom, hogy vadonatúj a bizonyítás, csak azt, hogy még nem olvastam.

Nézzük ezt az alternatív bizonyítást!

Ugyebár azt kell igazolnunk, hogy ha a, b és c tetszőleges pozitív valós számok, akkor teljesül, hogy

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

Legyen $x = \sqrt[3]{abc}$ azért, hogy ne legyenek köbgyökök. Ekkor $x^3 = abc$, s így $a = \frac{x^3}{bc}$. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy $\frac{x^3}{bc} + b + c \geq 3x$.

Nem kedveljük a törteket, ezért szorozzunk bc-vel. Így $x^3 + (b + c)bc \geq 3xbc$. A másodfok kezelhetőbb mint a harmadfok, ezért másodfokú kifejezést alakítunk ki, például b-re.

$$x^3 + b^2c + bc^2 - 3xbc \geq 0$$
$$cb^2 + (c^2 - 3xc)b + x^3 \geq 0$$

Ennek a b-re másodfokú egyenlőtlenségnek pontosan akkor vannak valós b megoldásai, ha diszkriminánsa nempozitív.

Vagyis $(c^2 - 3xc)^2 - 4cx^3 \leq 0$, ebből $4cx^3 - c^4 + 6c^3x - 9x^2c^2 \geq 0$, ezt osztva a pozitív c-vel kapjuk, hogy $4x^3 - c^3 + 6c^2x - 9x^2c \geq 0$. (*) Ezen egyenlőtlenség bal oldalát igyekszünk szorzattá alakítani.

$$x^3 - c^3 + 3x^3 + 6c^2x - 9x^2c \geq 0$$
$$x^3 - c^3 + 3x(x^2 + 2c^2 - 3xc) \geq 0$$
$$x^3 - c^3 + 3x(x^2 - 2xc + c^2 - xc + c^2) \geq 0$$
$$x^3 - c^3 + 3x((x - c)^2 - c(x - c)) \geq 0$$
$$(x - c)(x^2 + xc + c^2) + 3x((x - c)^2 - c(x - c)) \geq 0$$
$$(x - c)(x^2 + xc + c^2 + 3x(x - c) - 3xc) \geq 0$$
$$(x - c)(x^2 - 2xc + c^2 + 3x(x - c)) \geq 0$$
$$(x - c)((x - c)^2 + 3x(x - c)) \geq 0$$

Ez pedig igaz, ha $x \geq c$, hiszen ekkor a szorzat mindkét tényezője nemnegatív. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$ teljesül. Ekkor az $x \geq c$ azt jelenti, hogy $\sqrt[3]{abc} \geq c$, vagyis $abc \geq ccc$, ez pedig teljesül, ha $a \geq b \geq c$.

S mivel az elvégzett átalakításaink megfordíthatóak, ezért a kiindulási számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség is igaz.

A továbbiakban az egyenlőség esetét kell megvizsgálnunk. A számtani közép pontosan akkor egyenlő a mértani középpel, ha az előzőekben vizsgált diszkrimináns nullával egyenlő.

Vagyis $(c^2 - 3xc)^2 - 4cx^3 = 0$, tehát $(x - c)((x - c)^2 + 3x(x - c)) = 0$. Ez a szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha $x - c = 0$,

ha ugyanis ez nem teljesül, akkor a szorzat mindkét tényezője pozitív. Tehát $x = c$, így $\sqrt[3]{abc} = c$, tovább $abc = c^3$, vagyis $ab = c^2$.

Tegyük fel, hogy $b > c$, ekkor $a \geq c$ miatt $ab > c^2$ következik, ami ellentmondás, tehát $b = c$. Ezt behelyettesítve az $ab = c^2$ egyenletbe, kapjuk, hogy $a = c$. Összefoglalva a számtani és a mértani közép akkor és csak akkor egyenlő, ha $a = b = c$.

Természetesen a (*) egyenlőtlenség bal oldalát másképpen is szorzattá alakíthatjuk, például a következő módon:

$$x^3 - c^3 + 3x^3 - 3x^2c + 6c^2x - 6x^2c \geq 0$$
$$(x - c)(x^2 + xc + c^2) + 3x^2(x - c) - 6xc(x - c) \geq 0$$
$$(x - c)(x^2 + xc + c^2 + 3x^2 - 6xc) \geq 0$$
$$(x - c)(x^2 - 2xc + c^2 + 3x^2 - 3xc) \geq 0$$
$$(x - c)((x - c)^2 + 3x(x - c)) \geq 0$$

Ugyanazt kaptuk, mint az előbb.

Csete Lajos

Egy-egy elemi szorzattá bontási feladat

1. feladat

Waclaw Sierpinski: *200 feladat az elemi számelméletből* című középiskolai szakköri füzetében olvashatjuk a következő problémát.

Bizonyítsuk be, hogy az $xy + x + y = 2^{32}$ egyenlet megoldható az x, y pozitív egész számok körében, és csak egyetlen olyan megoldása van, amelyre $x < y$. [1], 128. feladat.

A feladat megoldásához 1-et adunk mindkét oldalhoz, és fölismerjük, hogy a bal oldal szorzattá alakítható, míg a jobb oldal a nevezetes ötödik Fermat-féle szám. Tehát

$$xy + x + y + 1 = 2^{32} + 1 = 2^{(2^5)} + 1$$
$$(x + 1)(y + 1) = 2^{(2^5)} + 1$$

Néhányan tudni szokták manapság, hogy az ötödik Fermat-féle szám osztható 641-gyel, ami prímszám. Erről az ötödik Fermat-féle számról maga Pierre de Fermat (1601–1665) még azt hitte, hogy prím. Később a nagy Leonhard Euler (1707–1783) fedezte fel 1732-ben, hogy osztható 641-gyel, ezért nem prím.

G. T. Bennett mutatott egy egyszerű bizonyítást erre az osztás elvégzése nélkül.

Mivel $641 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$ osztója az $5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}$ és az $5^4 \cdot 2^{28} - 1$ számoknak, így osztója ezek különbségének is, ami éppen $2^{32} + 1$. [2], 44. old.

Egy másik bizonyítást kapunk akkor, ha észrevesszük, hogy

$$(2^9 + 2^7 + 1)(2^{32} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^9 - 2^7 + 1) = 2^{32} + 1,$$

ahol a szorzat első tényezője éppen 641, míg a szorzat második tényezője 6 700 417, ami szintén prímszám. [3], 26. old.

Így $x = 640$ és $y = 6\,700\,416$. (Amúgy $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$.)

Sierpinski megjegyzi a feladat megoldása után:

„Érdekes, hogy bizonyos kétismeretes másodfokú egyenletekről tudjuk, hogy x-re és y-ra ($x \leq y$) csupán egyetlen megoldásuk van a természetes számok körében, de (pusztán technikai nehézségek miatt) nem tudjuk azt a megoldást megadni.

Ez a helyzet például az $xy + x + y + 2 = 2^{101}$ egyenlet esetén is." [1], 95. old.

Felmerülhet bennünk, hogy vajon a szakköri füzet 1964-es, illetve az 1968-as magyar kiadása óta történt-e annyi fejlődés a technikában, hogy sikerült szorzattá bontani a $2^{101} - 1$ számot, amely a kulcsa az említett diofantikus egyenlet megoldásának.

Minden bizonnyal ezt már jó néhány évvel ezelőtt megtehették. Nekünk is van erre ma már lehetőségünk, ha valamely számítógép-algebrai rendszert alkalmazunk. Mi a Maple programot választottuk erre a célra. Először körülbelül

1992-93 táján egy 25 MHz-es 386-os gépezeten futtatott Maple programmal próbálkoztam. Akkor a gép és a program 3772 másodperc (ami kevesebb, mint 63 perc) alatt megszülte a megoldást. Ma már a program egy fejlettebb változatával és kissé gyorsabb géppel jóval hamarabb megkaphatjuk a szorzattá bontást.

> ifactor (2^101-1);

(7432339208719)(341117531003194129)

Egy 13 jegyű és egy 18 jegyű prímszám szorzatát kaptuk. Így a megjegyzésben említett diofantikus egyenlet megoldása:

$$x = 7\,432\,339\,208\,719 \text{ és}$$
$$y = 341\,117\,531\,003\,194\,129$$

2. feladat

Egy tanári kézikönyvben [5] olvashatjuk a következő feladatot:

A $p(x) = x^n - 1$, ahol n természetes szám sok vizsgálatban szerepel. (A Fermat-tétel is kapcsolatban van vele.) Érdekes kérdés az, hogy hogyan bontható fel $x^n - 1$ alacsonyabb fokú egész együtthatós polinomok szorzatára. Az együtthatók egész számok, és addig végezzük a felbontást, amíg tudjuk.

$$x - 1 = x - 1$$
$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$
$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$
$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$
$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$
$$x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Azt vesszük észre, hogy minden együttható 1 vagy –1. Vajon ez általában is igaz?

A tanári segédkönyvből megtudhatjuk, hogy a próbálkozások csak 1941-ben jártak sikerrel, amikor egy V. Ivanov nevű orosz matematikus megmutatta, hogy az $x^{105} - 1$ felbontásában az egyik tényezőben szerepel –2-es együttható is, vagyis általában nem igaz, hogy csak 1-esek és –1-esek (illetve nullák) szerepelnek a tényezők együtthatói között. Az említett könyvben megtaláljuk a szóban forgó tényezőt, amelyet nyilván nagyon fáradtságos és kitartó kézi számításokkal kapott Ivanov. A továbbiakban a Maple Release 4 Student programmal mi is meghatározzuk $x^{105} - 1$ teljes felbontását.

> factor (x^105-1);

$$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4+x^3+$$
$$+x^2+x+1)(1-x+x^5-x^6+x^7-x^8+x^{10}-$$
$$-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{16}+x^{17}-x^{18}+x^{19}-$$
$$-x^{23}+x^{24})(x^2+x+1)(1-x+x^3-x^4+x^6-$$
$$-x^8+x^9-x^{11}+x^{12})(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+$$
$$+x^8)(1+x-x^8+x^{13}+x^{14}+x^{16}+x^{17}-x^{24}+$$
$$+x^{12}-2x^7-x^6-x^5+x^2-x^{42}-x^{43}+x^{46}+$$
$$+x^{47}-x^{26}-x^{28}+x^{34}+x^{36}-x^{39}-x^{40}-$$
$$-2x^{41}+x^{35}+x^{31}+x^{32}+x^{33}-x^{20}-x^{22}+$$
$$+x^{48}+x^{15}-x^{19})$$

Felmerülhet az a kérdés is, hogy a 105 az első olyan kitevő-e, amelynél belép egy 1 és –1-től különböző együttható. A programmal könnyen igazolhatjuk, hogy valóban 105 az első ilyen kitevő.

Ennél jóval nehezebb kérdés az, hogy milyen nagyok lehetnek a tényezők együtthatói. Ezzel kapcsolatban Robert Charles Vaughan 1974-ben kimutatta, hogy végtelen sok n esetén van olyan irreducibilis tényezője az $x^n - 1$ polinomnak, amelynek együtthatói túllépik az $e^{n^{\frac{1}{\lg\lg n}}}$ korlátot, ahol $e \approx 2{,}71...$ a természetes logaritmus alapszáma. [4] , 439. old.

Feladatok

1. Igazoljuk, ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím!
2. Igazoljuk, hogy ha $n > 4$ páros szám, akkor $2^n - 1$ legalább három egynél nagyobb természetes szám szorzata! [1], a 83. feladat alapján.
3. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy legalább k különböző prímmel osztható a $2^n - 1$ szám. [1]! 83a. feladat
4. Adjunk meg olyan $2^n - 1$ természetes számokat (vagyis Mersenne-féle számokat), amelyek két prímszám szorzatával egyenlőek! [1] a 83. feladat alapján
5. Végtelen sok $2^n - 1$ alakú Mersenne-féle szám van-e, amely két prímszám szorzata? (Úgy tűnik, hogy megoldatlan, sőt még az sem ismert, hogy végtelen sok Mersenne-féle szám prímszám-e.)

6. Igazoljuk, hogy ha $2^n + 1$ prímszám, akkor az n természetes szám 2-nek pozitív egész kitevős hatványa!
7. Igazoljuk, hogy ha n nem 2-nek pozitív egész kitevőjű hatványa, akkor $2^n + 1$ összetett szám!
8. Mutassuk meg, hogy ha Fermat 1640-ben alkalmazott volna egy 1640-es Fermat-tételt (Ha p prím, akkor minden egész n-re $n^p - n$ osztható p-vel.), akkor igazolhatta volna, hogy $2^{32} + 1$ összetett szám. [4], 382. old.
9. Oldjuk meg az $xy + x + y = 2^{128}$ egyenletet a pozitív egész számok halmazán!
   (Ha nem bírnánk vele, akkor megnézhetjük $2^{128} + 1$ felbontását [4], 387. oldalán, 1970-ből.
   Ez a szám éppen a hetedik Fermat-féle szám, már 1909-ben igazolták, hogy összetett. A kitűnő [2] könyv azt írja a 45. oldalon, hogy nem ismert a felbontása. Sajnos a magyar szerkesztők sem az 1973-as első magyar, sem az 1987-es második magyar nyelvű kiadásban nem említik, hogy már 1970-ben felbontották prímtényezők szorzatára.)
10. Megoldható-e az $xy + x + y = 2^{(2^{17})} = 2^{131072}$ egyenlet a pozitív egész számok halmazában?
    (Úgy tűnik, hogy nem tudni még a választ.) [1], 96. oldal

Történeti nyomok

Leonhard Euler (1707–1783)
Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC,* (5. átdolgozott és bővített kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. 105-108. old.
Sain Márton, *Nincs királyi út!,* Gondolat, Budapest, 1986. 694-697. old. és egyéb helyeken.
Dirk J. Struik, *A matematika rövid története,* Gondolat Kiadó, 1958. 128-136. old. (Jó arckép a 136. oldal utáni második kép.)
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Euler.html (arcképpel)

Pierre de Fermat (1601–1665)
Sain Márton, *Nincs királyi út!,* Gondolat, Budapest, 1986. 572 - 573.o1d., arcképpel.
Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC,* (5. átdolgozott és bővített kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. 116 - 117. old.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Fermat.html (arcképpel)
Simon Singh, *A nagy Fermat-sejtés,* Park Kiadó, 1999.
László István, *Fermat és nagy tétele,* Természet Világa, 1999/2. 50 -53. old.

V. Ivanov
A. N. Bogoljubov, Matematiki mehaniki (Biograficseszkij szpravocsnyik), Kijev, Naukova Dumka, 1983. című művében négy Ivanov szerepel, ezek közül egynek van V betűs keresztneve. Mégpedig Valentyin Konsztantinovics Ivanovnak, aki 1908-ban született Szentpétervároh. V.K. Ivanov alapvető munkáit az algebra, a komplex függvénytan, a matematikai fizika és a közelítő módszerek témaköreiben végezte. Valószínűleg ő az a V. Ivanov, aki először bontotta szorzattá az $x^{105} - 1$ kifejezést.

Waclaw Sierpinski (1882–1969)
Sain Márton, *Nincs királyi út!,* Gondolat, Budapest, 1986. 737. old (arckép)
Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC,* (5. átdolgozott és bővített kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. 272-273. old.
Jobb arcképe a Waclaw Sierpinski, *200 feladat az elemi számelméletből,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. könyvben látható.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Sierpinski.html (arcképpel)

Irodalom

[1] Sierpinski, Waclaw, *200 feladat az elemi számelméletből,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. (A lengyel kiadás 1964-ben.)

[2] Coxeter, H. S. M., *A geometriák alapjai,* 2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[3] Niven, Ivan – Herbert S. Zuckerman, *Bevezetés a számelméletbe,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[4] Knuth, Donald E., *A számítógépprogramozás művészete 2.,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[5] Dr. Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos, *Matematika III-IV. Tanári kézikönyv a fakultatív „B" tantervű gimnáziumi matematika-tankönyvekhez,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. 170-171. old.

A 2000. évi Beke Manó-emlékdíjasok

A Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó Emlékdíj Bizottsága 2000-ben a következő díjakat ítélte oda:

a *Beke Manó-díj I. fokozatát* **C. Neményi Eszter**nek, aki kiemelkedő és meghatározó egyénisége az elmúlt évtizedek matematika tanítása korszerűsítésének az általános iskolákban;

a *Beke Manó-díj II. fokozatát* **Árokszállási Tibor**nak, akinek rendkívül magas színvonalú matematikatanári munkája, sikeres tehetséggondozó tevékenysége, áldozatkészsége, szervezőkészsége a paksi Energetikai Szakképzési Intézetben példaértékű, országos hírű matematikatanítási centrum létrejöttét segítette elő;

Dr. Cseténi Istvánnénak, a győri Fekete István Általános és Szakképző Iskola fejlesztő tanárának, matematika munkaközösség vezetőnek, aki aktív szereplője a Győr-Moson-Sopron megye matematikai rendezvényeinek, a Bolyai János Matematikai Társulat feladatmegoldó délutánjainak;

Fazakas Tündének, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium tanárának, aki speciális matematika tagozaton tanít, tehetséges, gyors gondolkodású, kiváló feladatmegoldó és ötletes feladatalkotó matematikus, tanári munkájára az önmagával és tanítványaival szembeni rendkívüli igényesség jellemző;

Kosztolányi Józsefnek, aki meghatározó szerepet tölt be a magyar közoktatás matematikai nevelésének kialakításában, kitűnő tanárszemélyiség, tanítványai az általános iskolás korú diákoktól az egyetemi hallgatókig tisztelettel, elismeréssel szólnak szakmai és nevelő munkájáról. Számos könyve; cikke, előadása, továbbképzése, nyári tábora szolgálja a matematika tanításának ügyét;

Dr. Németh Józsefnek, a karizmatikus, kiváló szakmai és módszertani felkészültségű pedagógusnak. A tanárjelöltek példamutató felkészítése mellett sok-sok továbbképzést, előadást, tréninget tartott középiskolai tanárok és diákok számára. Óriási tudása, jól szerkesztett előadásai, szigorú és következetes magatartása, remek humorérzéke, kimeríthetetlen segítőkészsége hozzájárult ahhoz, hogy nagyon sokan büszkén mondják: Németh József tanítványa vagyok!

Peák Istvánnénak, a magas szakmai felkészültségű, munkájára igényes tanárnőnek, aki a tanítást élethivatásának tekinti.

Részletes indoklások

C. Neményi Eszter

Tanítóképző Főiskolát végzett, majd hároméves tanítási gyakorlat után az ELTE TTK matematika-fizika szakán szerzett középiskolai tanári diplomát.

1969 januárjától bekapcsolódott a Varga Tamás nevéhez fűződő matematikatanítási kísérletbe, és főállású OPI dolgozó lett. Ezzel párhuzamosan a budapesti Bartók Béla Úti Általános Iskola óraadó tanítója volt. 1989-től a Budapesti Tanítóképző Főiskola Matematika Tanszékének oktatója.

Az 1970-es évektől a magyar általános iskolákban a számtan-mértan tanítását felváltotta a matematika tanítása. Ehhez a tantervet Varga Tamás „álmodta meg", és C. Neményi Eszter ültette át a gyakorlatba. Elsősorban az alsó-tagozat, de a felsőbb évfolyamok helyes és eredményes matematikai neveléséhez is hozzájárult kiváló tanterveivel, tankönyveivel, segédeszközeivel, szemléltetőeszközökkel, igen színvonalas továbbképzéseivel, a továbbképzésekhez készített anyagokkal.

A Budapesti Tanítóképző Főiskola kiadásában megjelenő Tantárgypedagógiai füzetek so-

rozata hasznos támasz a mindennapi gyakorlatban tanítóknak, frissítő hatású a gyakorlottabb tanítók munkájára. Kitűnő ötletek, kipróbált tapasztalatok, módszertani ajánlások tárháza ez a sorozat.

C. Neményi Eszternek a matematika tanítása jobbításáért, eredményességéért kifejtett munkássága, töretlen hite a korszerű fejlesztés tartalmi és módszertani elterjesztésében példamutató. Matematikatanítási koncepciója az új évezred küszöbén is korszerű.

A matematika tanításával kapcsolatos gondolatait, hitvallását a Nemzeti Tankönyvkiadó gondozásában megjelenő alsós tankönyvcsaládja kitűnően tükrözi. Bízunk abban, hogy egyre többen fedezik fel újra és újra könyveinek értékeit, okítják belőle a magyar kisdiákokat!

C. Neményi Eszter szakmai felkészültsége, tudása, empátiája, toleranciája, óriási türelme és barátsága sokunkat segített hozzá ahhoz, hogy tudatosodjon bennünk az a szemlélet, az a matematikatanítási koncepció, melynek központjában a gyermek, az iránta érzett felelősség, a cselekvésből kiinduló gondolkodás fejlesztése és a felfedeztető tanítás-tanulás áll.

A ma készülő kerettantervekben megerősítést kap a fejlesztésközpontúság, a tanulók teljes személyiségfejlesztése, ezért elmondható, hogy C. Neményi Eszter elvei ma is alapkövei a hatékony és eredményes matematikai nevelésnek.

Árokszállási Tibor

1982-ben kapott diplomát a JATE matematika-fizika szakán. Először szülővárosában, a győri Jedlik Ányos Szakközépiskolában, majd a mezőberényi Petőfi Sándor Gimnáziumban tanított. 1988-tól a paksi Energetikai Szakképzési Intézet tanára, és szaktanácsadó. Feleségével, Árokszállási Eszterrel megalkotott matematikatanítási centrum eredményességét dicsérik a Paks városa és térsége tanulói számára szervezett kitűnő előkészítők, szakkörök, a gyengébbeket is segítő fejlesztő tevékenységek, tanári továbbképzések, a matematikatanítás eredményességét segítő programok, szakmai cikkek.

1995-ben rendkívül magas színvonalon szervezték meg a IV. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyt, s munkájuknak köszönhető e programot segítő alapítvány létrejötte.

Árokszállási Tibor nemcsak a hazai, hanem a hazai és határontúli diákok és tanárok közötti folyamatos kapcsolattartást is segíti.

A Bolyai János Matematikai Társulat Tolna megyei tagozatának nyolc éve vezetőségi tagja, négy éve a tagozat titkára. Feladataival, tanácsaival, fáradhatatlan munkabírásával nagyban hozzájárult e tagozat programjainak sikeréhez.

Az Arany Dániel Matematikaversenyen és a Matematika OKTV-I. versenyein, a Nemzetközi Magyar Matematika Versenyen és más országos versenyeken tanítványai rendszeresen ott szerepelnek az elsők között. Biztatást, segítséget ad mindenkinek, aki őszinte érdeklődést tanúsít a matematika iránt.

Az általa szervezett és/vagy vezetett szakmai programok jelentősen hozzájárultak a magyar matematikatanítás eredményességéhez.

Dr. Cseténi Istvánné

A matematikatanítás hatékonyságának fokozása céljából a tananyag- és követelményrendszerhez csatlakozóan a megismerés ismeret-, megértés-, alkalmazás- és magasabbrendű értelmi műveleti szintekhez tudásszintmérő feladatlapokat tervezett és sikerrel alkalmazott a tanulócsoportjai körében.

Az Országos Közoktatási Alap pályázati támogatásával iskolájában megvalósította a nívócsoportos matematikaoktatást, létrehozta a szakmunkásképzés modernizációját, kiépítette annak feltételrendszerét. Kiváló minősítésű pedagógiai fejlesztő programot készített, minőségi köröket szervezett, intézményében megvalósította a minőségbiztosítás gyakorlatát.

A Megyei Pedagógiai Intézet holland iskolafejlesztő programjának keretében iskolájában

elindult a szocioemocionális tanterv- és tanmenetfejlesztés gyakorlati megvalósítása.

Folyamatosan kutatja a gyengébb felkészültségű tanulók ismeretelsajátításának problémáit. Pályázati támogatással, műhelymunka szervezésével segítette a szociálisan hátrányos helyzetű és tanulási nehézségekkel küzdő tanulók felzárkóztatását.

Dr. Cseténvi Istvánné sokoldalú, kiváló szakmai és pedagógiai felkészültségű, innovatív tanárnő.

Fazakas Tünde

1976-ban a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium speciális matematika tagozatán érettségizett, majd az ELTE TTK-n végzett tanulmányai után azonnal visszament középiskolájába tanítani. A tanítás mellett most a PhD-fokozat eléréséért is dolgozik.

Tanított normál matematika-tantervű osztályokban is, de elsősorban a speciális matematika-tantervű osztályokat bízták rá. A hatosztályos speciális matematika tagozatos tanításra nagy körültekintéssel készült. A 12-14 éves tanulók pedagógiai irányítására, nevelésére való előkészületek során két éven át óralátogatásokon, különféle tanórán kívüli foglalkozásokon vett részt, hogy tapasztalatokat gyűjtsön.

Több országos programon, nyári továbbképzésen vitatta meg tapasztalatait, osztotta meg élményeit, problémáit kollégáival.

Előadásainak, bemutató óráinak látogatottsága igazolja, hogy szakmai ötletei, újításai, módszerei nagy érdeklődést váltanak ki a kollégákból.

Az elmúlt évben jelent meg a Bergengóc példatár című matematikai feladatgyűjtemény, mely a 7. évfolyamos osztályának – Hraskó András kollégával együtt – hétről hétre készített matematika feladatsorait és a kis tanítványok érdekes megoldásait tartalmazza.

Fazakas Tünde küldetésének tekinti, hogy a vele kapcsolatba kerülő gyerekekben felkeltse a műveltség igényét, megtanítsa őket a másik ember tiszteletére, más tudásának az elismerésére. Feladatának tekinti az oktatás mellett a nevelést, toleranciára, fegyelmezettségre, szerénységre, segítőkészségre neveli az országos matematikaversenyeken rendszeresen az első helyeken, az élvonalban szereplő tanítványait, osztályát.

Fazakas Tünde kiváló tanár és segítőkész kolléga, mindig lehet rá számítani!

Kosztolányi József

A JATE matematika-fizika szakán 1987-ben kitüntetéses oklevéllel diplomázott. A szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium matematikatanára, majd a JATE TTK Bolyai Intézetének tanársegédje, illetve egyetemi adjunktusa lett.

1999-től PhD-dolgozatát írja a debreceni KLTE Matematikadidaktikai alprogramjának keretében, témája: A problémamegoldhatóság tanítása.

Ebben a témakörben számos nagysikerű előadást tartott országos és regionális fórumokon, nyári táborokban, szakmai továbbképzéseken, Rátz László Vándorgyűlésen stb. Előadásait az érdekesség, újszerűség, eredetiség, frappáns megoldások jellemzik.

Miközben folyamatosan tanít a Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumban, módja van a gyakorlatban megtapasztalni a problémákat, gondokat, a tehetségek kiválasztásának felelősségét, sokszínű gondozását. Sokoldalú szakmai felkészültsége mellett a napi gyakorlati tapasztalatnak is köszönhető, hogy munkái, könyvei nyomán országos elismerést, megbecsülést, tiszteletet kapott a kollégáktól.

Ma már az Oktatási Minisztériumtól, az OKSZI-n, a Bolyai János Matematikai Társulaton át az egyes konkrét iskolákig, tanárokig kérik és várják segítő szándékú munkáját, megfogadják tanácsait. Bármilyen legyen is a kapott feladat, azt mindig szakmai alázattal, de megfelelő kritikai hozzáállással végzi. Véleményét őszintén, határozottan, de soha nem bántón mondja el.

Szakmai felkészültsége, kiváló emberi tulajdonságai alkalmassá teszik mind a fiatalok matematikai nevelésére, mind a felnőtt kollégák szakmai, módszertani ismereteinek felfrissítésére.

Középiskolai tanítványai fáradhatatlan munkáját azzal hálálják meg, hogy ott szerepelnek a különböző matematikaversenyek élvonalában, sőt némelyek már a tőle tanult, látott módszerekkel maguk is továbbadják kisebb társaiknak
a tudásukat.

A gyakorló tanárok, különböző országos, regionális intézmények munkatársai nagyra értékelik, tisztelik Kosztolányi Józsefet, bíznak szakértelmében, várják segítségét!

Dr. Németh József

1967-ben matematika-ábrázoló geometria középiskolai tanári diplomát kapott a JATE-n. Ezután a Bolyai Intézetben, majd a JATE Analízis Tanszékén dolgozott, később a Juhász Gyula TFK Matematika Tanszéke vezetője lett.

Két évet Amerikában vendégprofesszorként tanított. Számos cikke, értekezése, feladatgyűjteménye, könyve tükrözi nagy tudását, szakmai hozzáértését, naprakész felkészültségét.

Kiváló előadó, tanítványai rajonganak érte. A „Végtelen, végtelen kicsi és nagy a középiskolában" című kurzusán mindig sok a résztvevő.

A közoktatás matematikatanításának különböző országos (pl: Rátz László Vándorgyűlés) és regionális (pl: Csongrád megyei MPI) fórumain tartott előadásai, továbbképzései, konzultációi során sokat tett a problémák világos megértése, alapos megismerése, logikus, ötletes megoldások megkeresése, ezek tanítási gyakorlatban való alkalmazása érdekében.

Tanítványai nemcsak a szakmai alázatot, a folyamatos és magas színvonalú munkát, az önképzés igényét, a szigorú következetességet magával és másokkal szemben, hanem az áldozatos segítőkészséget, a mérhetetlen empátiát, a finom humort, az őszinte barátságot is megtapasztalhatták mellette, hiszen személyisége az igazi emberi értékek hordozója.

Dr. Németh Józsefnek a matematikáért, mint tudományért és matematikai műveltség elterjesztéséért mind a közoktatásban, mind a felsőoktatásban végzett tevékenysége kiemelkedő.

Peák Istvánné

1964-ben végzett a Szegedi Tudományegyetem matematika-fizika szakán. Szegeden, majd a salgótarjáni Bolyai János Gimnáziumban tanított.

Csendben, lelkiismeretesen és fáradhatatlanul végezte napról napra, hosszú évek során a munkáját.

A matematikát folyamatosan emelt szinten tanította. Rendszeresen tartott matematika szakköröket. Tanítványai eredményesen szerepeltek a megyei matematikaversenyeken. Többször volt a matematika OKTV-n, illetve az Arany Dániel Versenyen döntős tanítványa. Megyéjének versenyfeladatokat készített, segített a verseny lebonyolításában.

Diákjait a matematika szeretetén, a matematikai problémákban való elmélyedésen túl szerénységre, becsületességre, segítőkészségre nevelte.

Iskolájában sok-sok évig irányította a matematika munkaközösséget. Gimnáziumának több tantervet és tanmenetet készített.

Szívesen fogadott matematika tanárjelölteket pedagógiai gyakorlatra, nagy empátiával segítette felkészülésüket. Büszke arra, hogy saját tanítványai közül többen matematikusok, matematikatanárok, kollégái lettek.

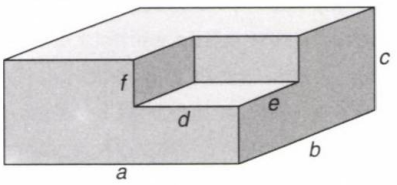
A matematika tanítása iránt érzett felelősséget, szeretetet szűkebb hazájában eredményesen adta tovább kollégáinak, sikeresen fejlesztette tanítványai teljes személyiségét, különösen a matematikai gondolkodásukat.

Mayer Zoltán

Egy probléma megbeszélése matematika szakkörön (szakközépiskolásoknak)

A témaválasztás indoklása:

Kereskedelmi középiskolában tanítok. A tanulók többsége nem motivált különösebben a matematika elsajátítására, és az a tapasztalatom, hogy a térszemléletük nem igazán fejlett. Egy szakköri foglalkozáson azonban a következő problémák megtárgyalására van mód.



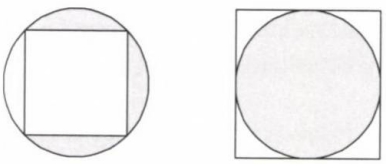
1. ábra

1. Vannak olyan csonkolások, amelyek alkalmával a testek felszíne nem változik. (1. ábra)

A megoldási terv készítésénél a tanulók sokszor gondolkodás nélkül rávágják, hogy a felszínt ugyanolyan elv szerint számítjuk ki, mint a térfogatot, nevezetesen: a nagy test térfogatából kivonva a kisebb téglatest térfogatát, nyerjük a maradék térfogatát. Ennél a testnél azonban világosan látszik, hogy ha a kis téglatest látható lapjaival kiegészítjük a nagy téglatest hiányait, akkor éppen a nagy felszínéhez jutunk, vagyis a csonkolástól a téglatest felszíne nem változott.

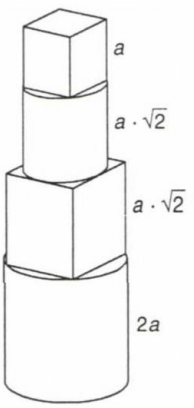
A térfogat tehát: $V = abc - edf$

A felszín: $A = 2(ab + bc + ac)$



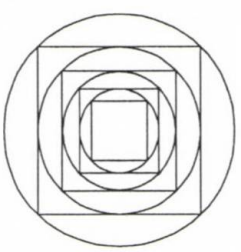
2. ábra

Tulajdonképpen a következő feladathoz ennek a problémának a máshol való megjelenése vezetett, nevezetesen: az összetett testeknél felszínszámításnál nem kell a letakart felületekkel foglalkozni.



3. ábra

2. Amikor *egy kockára hengert helyezünk* úgy, hogy az alapkör érintse a kocka fedőlapjának éleit, vagy *egy hengerre kockát* úgy, hogy a kocka alaplapjának csúcsai rajta legyenek a hengert fedő körlap körívén, majd azt a feladatot adjuk a tanulóknak, hogy számítsák ki az így összetett test felszínét és térfogatát, ak-



4. ábra

kor a térfogat kiszámítása még nem okoz gondot, de a felszín kiszámításánál legtöbben nem tudnak mit kezdeni az ábrán szereplő körszeletekkel, ill. a négyzetek és a rajtuk levő körlapok területének különbségével. (2. ábra)

A következő ábra arra is használható lesz, hogy majd a feladatot n kocka és n egyenlő oldalú henger esetére is megoldjuk. (3. ábra)

Pedig teljesen felesleges azokkal a területekkel bajlódni, mert a felszín szempontjából annak nincs jelentősége, hiszen elegendő arra figyelni, hogy a test felszíne a határoló felületek területének összege. Emiatt a látható (alaplappal párhuzamos) területek összege az alsó test fedőlapjának területét adja. Emiatt a felszín az alsó test felszínének és a megadott módon rátett testek palástjainak területösszege. Ez felülnézetben a következő: (4. ábra)

2.1. *Konkrét adatokkal, négy kocka és négy henger esetén:* legyen a legfelső kocka éle a. Ez alatt legyen egy egyenlő oldalú henger úgy, hogy a henger alapkörének átmérője legyen akkora, mint az alapnégyzet átlója; majd az alatt egy kocka legyen, majd az alatt ismét egy henger. Számítsák ki a tanulók az összetett test felszínét és térfogatát!

A kiszámítás egyik lehetséges módja a következő: gyakorlásként, és hogy észrevehessük a számítás során a szabályosságot, érdemes először egy olyan konkrét összetett test felszínét és térfogatát meghatározni, amelyben az előbbi szisztéma szerint négy kocka és négy henger szerepel. Ekkor legfelül egy a élű kocka, legalul pedig egy egyenlő oldalú henger van, amelynek átmérője és magassága is $4a$.

A felső kocka lapátlója $a\sqrt{2}$, ugyanekkora lesz az alatta levő henger átmérője és magassága is. Ezután ismét egy kocka következik, amelynek éle ugyanekkora, de amely alapjának átlója $2a$, amely az ez alatti hengernek is átmérője és magassága. A hosszúságok aránya $\sqrt{2}$, a területek aránya tehát ennek négyzete lesz, vagyis 2.

A kockák palástjai – azaz a kocka négy oldallapjának területe – a következők:

$K_1 = 4a^2$
$K_2 = 8a^2$
$K_3 = 16a^2$
$K_4 = 32a^2$

A hengerek palástjai:

$H_1 = 2a^2\pi$
$H_2 = 4a^2\pi$
$H_3 = 8a^2\pi$
$H_4 = 16a^2\pi$

Mindkettő mértani sorozat, ahol a $q = 2$.
Alkalmazva a mértani sorozat összegképletére vonatkozó összefüggést, adódik, hogy:

$$S_{4k} = 4a^2 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 60a^2$$

(a kockák palástjainak összege)

$$S_{4h} = 2a^2\pi \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 30a^2\pi$$

(a hengerek palástjainak összege)

Ha ezek összegéhez hozzáadjuk az alaphenger alap- és fedőkörének területösszegét, a felszínt kapjuk.

$$A_4 = 60a^2 + 30a^2\pi + 8a^2\pi = 60a^2 + 38a\pi$$
$$A_4 = a^2 \cdot (60 + 38\pi)$$

2.2. n db kocka és n db henger ugyanilyen módon való egymásra építése során keletkező összetett test felszínének meghatározásánál észrevesszük, hogy az n-edik kocka palástjának felszínére a következő forma adódik:

$$P_{kn} = 2^n \cdot 2a^2$$

Ez teljes indukcióval a következőképpen bizonyítható:

n = 1-re az állítás igaz, mert a legfelső kocka palástjának területe: $4a^2$.

Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$-ra is igaz. Mutassuk meg, hogy ebből következően $n = k + 1$-re is igaz!

$K_k = 2^k \cdot 2a^2$-ből következik, hogy a k. oldal nagysága $\sqrt{\frac{2^k \cdot 2a^2}{4}}$.

Ha ezt szorzom $\sqrt{2}$ -vel, akkor a $(k + 1)$. oldalt kapom, $a_{k+1} = \sqrt{\frac{2^{k+1} \cdot 2a^2}{4}}$, az ehhez tartozó palást pedig: $4 \cdot a_{k+1}^2 = 2^{k+1} \cdot 2a^2$, amit bizonyítani akartunk.

Ugyanígy lehet például bizonyítani, hogy az n. henger palástjára a következő alakot kapjuk:

$$P_{hn} = 2^n \cdot a^2\pi$$

$n = 1$-re az állítás igaz, mert az első henger palástjának a területe $2a^2\pi$. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra az állítás igaz, és mutassuk meg, hogy ebből következően $n = k + 1$-re is igaz.

$H_k = 2^k a^2\pi$. Mivel a hosszúságok aránya itt is $\sqrt{2}$, ezért a területek aránya ennek négyzete, vagyis 2. Ennek alapján tehát:

$$H_{k+1} = 2^k \cdot a^2\pi \cdot 2 = 2^{k+1} \cdot a^2\pi,$$

amit bizonyítani akartunk.

A palástok sorozata mind a kockáknál, mind az egyenlő oldalú hengereknél mértani sorozat, amelyek hányadosa 2. A kockák palástjainak sorozatánál az első elem $4a^2$, az egyenlő oldalú hengerek palástjai sorozatának első eleme pedig $2a^2\pi$.

n db növekedő élű kocka és n db növekedő átmérőjű egyenlő oldalú henger által összetett test felszíne úgy számítható ki, hogy mindkét sorozatra alkalmazzuk a mértani sorozat összegképletét, és ezek összegéhez hozzáadjuk a legalsó henger alsó és felső körlapjának területösszegét:

$$A_n = P_{kn} + P_{hn} + 2t_0.$$

Ebből következik, hogy: $A_n = 4a^2 \cdot (2^n - 1) + 2a^2\pi \cdot (2^n - 1 + 2^{n-2})$.

A nyert összefüggést az $n = 4$ esetre kipróbálva ugyanazt kapjuk, mint amit már az előzőekben kiszámoltunk, vagyis: $A_4 = 60a^2 + 38a^2\pi$-t.

2.3. A térfogat meghatározásánál a következőképpen járhatunk el:

2.3.1. Az egymás után következő kockák éleinek aránya: $\lambda = \sqrt{2}$, a térfogatnál az arányszám köbe szerepel, vagyis $2\sqrt{2}$. A kockák térfogatainak sorozata:

$$V_1 = a^3,$$
$$V_2 = a^3 \cdot 2^{\frac{3}{2}},$$
$$V_3 = a^3 \cdot 2^3,$$
$$V_4 = a^3 \cdot 2^{\frac{9}{2}},$$
$$\vdots$$
$$V_n = a^3 \cdot 2^{1,5(n-1)}.$$

Az n. elemre kapott összefüggést bizonyíthatjuk ismét teljes indukcióval!

$n = 1$-re az állítás igaz. Tegyük fel, hogy igaz az $n = k$ esetre, és bizonyítsuk be, hogy ebből következően igaz az $n = k + 1$-re is.

A k. kockára tehát: $V_k = a^3 \cdot 2^{1,5(k-1)}$. Ebből a k. oldalél hossza:

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot 2^{1,5(k-1)}}.$$

Ha ezt szorzom λ-val, akkor kapom meg a $(k + 1)$. oldalt. Vagyis

$$a_{k+1} = \sqrt[3]{a^3 \cdot 2^{1,5(k-1)}} \cdot \sqrt{2},$$

tehát

$$V_{k+1} = a_{k+1}^3 = a^3 \cdot 2^{\frac{3}{2}},$$

amit bizonyítani akartunk.

Ezzel beláttuk, hogy az n. kocka térfogatát a $V_n = a^3 \cdot 2^{(n-1)1,5}$ összefüggés állítja elő.

2.3.2. A henger térfogatára a következőt nyerjük:

$$V_{h1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 \cdot \pi,$$

$$V_{h2} = 2a^3\pi,$$

$$V_{h3} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot a^3\pi,$$

$$V_{h4} = 16a^3\pi,$$

.

.

.

$$V_{hn} = 2^{\frac{3n}{2}-2} \cdot a^3\pi.$$

Bizonyítsuk be ezt is teljes indukcióval!

$n = 1$-re igaz az állítás, mert $V_{h1} = a^3\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, és mutassuk meg, hogy ebből következően $n = k + 1$-re is igaz!

A k. sugár a következő:

$$r_k = \sqrt[3]{\frac{a^3 \cdot 2^{1,5k-2}}{2}}.$$

A $(k+1)$. sugarat a következőképpen írhatjuk fel:

$$r_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{a^3 \cdot 2^{1,5k-2}}{2}} \cdot \sqrt{2}.$$

Az egyenlő oldalú henger térfogatára ismert összefüggés szerint: $V = 2r^3 \cdot \pi$. Ennek alapján:

$$V_{k+1} = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3 \cdot 2^{1,5k-2}} \cdot \sqrt{2}\right)^3,$$

amiből pedig $V_{k+1} = 2^{1,5k-0,5} \cdot a^3\pi$ adódik, amit bizonyítani akartunk.

2.3.3. Az összetett test térfogata pedig a két sorozatból a mértani sorozat összegképletének felhasználásával számítható:

$$V_{kn} = a^3 \cdot \frac{\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^n - 1}{2^{\frac{3}{2}} - 1}$$

összeget kapjuk a kockák térfogatösszegeként, míg az egyenlő oldalú hengerek térfogatösszegére a következőt:

$$V_{hn} = a^3\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^n - 1}{2^{\frac{3}{2}} - 1}.$$

Az összetett test térfogatára tehát ezek összegét nyerjük, amelyet egyszerűbb alakban is felírhatunk:

$$V = a^3 \cdot \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^n - 1}{2\sqrt{2} - 1} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi\right).$$

2.3.4. Ha eddig eljutottunk, akkor érdemes a kapott összefüggést kipróbálni néhány ilyen összetett test térfogatának meghatározására!

Pl.: az oszlop tetején lévő négy testből összetett test térfogata a következő lesz:

$$V_{ö4} = a^3 \cdot 2\sqrt{2} + 2a^3\pi + a^3 + a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi.$$

Pethőné Vendel Teréz – Bereczkiné Székely Erzsébet

Beszámoló a GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről

Immár negyedik alkalommal rendeztük meg a GORDIUSZ Matematika Tesztversenyt országos szinten. Az első fordulóra 7485 hazai és 1392 határon túli magyar középiskolás nevezett, a határon túliak Erdélyből és Vajdaságból.

A döntőre 2000. április 8-9-én került sor Pécsett. Az első fordulóban legjobb eredményt elért 164 tanulót hívtuk meg, közülük nyolcan egyéb elfoglaltságuk miatt nem tudtak részt venni a versenyen.

A Leőwey Klára Gimnáziumban tartott április 8-i ünnepélyes megnyitó után következett a 90 perces verseny. Minden évfolyamon 30-30 feladatot kellett megoldani, és a lehetséges 5 válasz közül az 1 helyeset kiválasztani. Az értékelés számítógéppel történt, a versenyzők pontszámát a 4H - R +30 képlettel határoztuk meg, ahol H a helyes, R a rossz válaszok száma. A versenyt követően az érdeklődő tanulókkal megbeszéltük a helyes válaszokat, itt sok érdekes, ötletes, rövid megoldás is elhangzott.

A verseny közben a kísérő tanárok részére a PTE PMMFK Matematika Tanszékéről dr. Klincsik Mihály és Sárvári Csaba tanárok tartottak egy előadást a Maple V számítógép algebrai rendszer alkalmazási területeiről.

Délután városnézésen vagy mecseki sétán vehettek részt az érdeklődők, este a Pécsi Nemzeti Színházban Dobozy Imre: Villanegra című tragikomédiájának előadása szórakoztatta a verseny résztvevőit.

Vasárnap került sor az ünnepélyes eredményhirdetésre a Művészeti Szakközépiskola színháztermében. Először az iskola diákjai kedveskedtek egy műsorral a vendégeknek, majd Póla József a PTE TTK Matematika Tanszékének adjunktusa tartott ünnepi beszédet.

Az egyes évfolyamok díjazott versenyzői a következők:

9. évfolyam

1. Nagy Tibor, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
2. Csóka Endre, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
3. Gáthy Lajos, Zalka Máté Gimnázium, Fehérgyarmat
4. Ruppert László, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
5. Lang Péter, Révai Miklós Gimnázium, Győr
6. Fehér Ádám, Révai Miklós Gimnázium, Győr

10. évfolyam

1. Balogh János, Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
2. Siroki László, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
3. Tóth Ágnes, Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
4. Jesch Dávid, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa
5. Simon András, Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár
6. Iván Szilárd, Bolyai János Gimnázium, Kecskemét

11. évfolyam

1. Vörös László, Révai Miklós Gimnázium, Győr
2. Vető Bálint, Vörösmarty Mihály Gimnázium, Érd
3. Babos Attila, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest
4. Wéber Zoltán, Eötvös József Gimnázium, Tata
5. Vizer Tibor, Piarista Gimnázium, Kecskemét
6. Jelenka József, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba

12. évfolyam

1. Herczegh Géza, Varga Katalin Gimnázium, Szolnok
2. Iván Szabolcs, Bolyai János Gimnázium, Kecskemét
3. Hegedüs Ákos, A Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma, Pécs
4. Molnár László Milán, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
5. Bákor Krisztina, Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
6. Nagy Gábor, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

Az első helyezetteknek dr. Kékes Ferenc, a Baranya Megyei Közgyűlés elnöke adta át a jutalmakat. A döntőn szereplő minden résztvevő kapott oklevelet, amelyet H. Barakonyi Klára festő- és grafikusművész tervezett.
Háromféle különdíj került átadásra:

1. Meixner András Pécs Megyei Jogú Város Közgyűlése Oktatási Bizottságának elnöke évfolyamonként egy-egy könyvvel jutalmazta a legeredményesebb határon túli versenyzőket.
9. évfolyamon: Sipos Kinga, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
10. évfolyamon: Horváth Szabolcs, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
11. évfolyamon Vitális Sándor, Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
12. évfolyamon: Kósa Gergely, Al. Papiu Ilarian Líceum, Marosvásárhely

2. Walz Jánosné a Baranya Megyei Önkormányzat Pedagógiai Intézetének igazgatója a legeredményesebb baranyai versenyzőnek, Hegedüs Ákosnak, a Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziumából adott könyvjutalmat.

3. A MATEK Alapítvány kuratóriuma és a verseny szervezői nevében dr. Poronyi Gábor azokat a diákokat jutalmazta, akik négy éven keresztül a döntő résztvevői voltak:

1. Bákor Krisztina, Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
2. Dénes Attila, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba
3. Dezső Balázs, Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
4. Hegedüs Ákos, A Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma, Pécs

(A versenyről információkat olvashatnak az interneten a www.extra.hu/gordiusz-matek címen.)

Az alábbiakban a tanulók számára kitűzött feladatsorokból válogatást közlünk. (A feladatsorokat Bereczkiné Székely Erzsébet, Pethő József, Pethőné Vendel Teréz, Polcz Katalin és dr. Poronyi Gábor állították össze.)

9/1. A -1; $-\frac{1}{5}$; 0; $\frac{1}{5}$; 1 számok között hány olyan van, melyet reciprokával megszorozva 1-et kapunk?
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

9/2. Ha egy négyzet átlójának hossza $a + b$, akkor a négyzet területe:
(A) $(a+b)^2$ (B) $\frac{(a+b)^2}{2}$ (C) $a^2 + b^2$
(D) $\frac{a^2+b^2}{2}$ (E) $(a+b)(a-b)$

9/3. Egy gyár 1200 dolgozója 23%-ának szolgálati motort, a többiek felének szolgálati autót biztosít. A tél beköszöntével a cég a szolgálati járművek összes gumiját télire cseréli. Hány téli gumit kell a cégnek vásárolni?
(A) 2400 (B) 1848 (C) 1476
(D) 1200 (E) 738

9/4. Egy buszvégállomásról négy járat indul egyszerre a reggel 6 órai üzemkezdéskor. Utána 5, 8, 12 illetve 18 percenként indulnak a járatok ugyaninnen. A 22 órás üzemzárásig naponta összesen hány alkalommal indul egyszerre a négy járat erről a végállomásról?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

9/5. Egy gyárban – egymás alá rendelve – 1 igazgató, 2 igazgatóhelyettes, 4 üzemvezető, 12 brigádvezető és szakmunkások dolgoznak. Az összes beosztott száma tízszerese az összes vezető számának. (Vezető mindenki, akinek van beosztottja; beosztott mindenki, akinek van felettese.) Hány ember dolgozik a gyárban?
(A) 172 (B) 188 (C) 190 (D) 191 (E) 209

10/6. Hányféleképpen lehet egy 7 fokból álló létra tetejére feljutni, ha egyszerre 1 vagy 2 fokot léphetünk?
(A) 7 (B) 8 (C) 13 (D) 21 (E) 5040

10/7. Az *ABCD* négyzet síkjában hány olyan *P* pont van, amelyre a *PAB*, *PBC*, *PCD* és *PAD* háromszögek egyenlő szárúak?
(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 8 (E) 9

10/8. Az elmúlt száz évben hány olyan év volt, amikor az évszám számjegyeinek szorzata egy pozitív egész szám négyzetével volt egyenlő?

(A) 9 (B) 13 (C) 17 (D) 23 (E) 28

10/9. Ha egy szám öttel osztva 4 maradékot ad, és néggyel osztva 1 maradékot ad, akkor mennyi a maradék 20-szal osztva?

(A) 6 (B) 9 (C) 11 (D) 14 (E) 19

10/10. Négy kártya fekszik előttünk. Tudjuk, hogy minden kártya egyik oldalán betű van, a másikon szám. A kártyákon ezt látjuk: U, S, 2, 3. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy eldöntsük, igaz-e a következő állítás: „Ha egy kártya egyik oldalán magánhangzó van, akkor a másik oldalán páros szám áll."

(A) U, S, 2, 3 (B) U, 2 (C) U, 3
(D) U, S, 2 (E) U, 2, 3

11/16. Ha x és y olyan racionális számok, hogy $\left(2-\sqrt{3}\right)x+\left(2\sqrt{3}-1\right)y=3-\sqrt{3}$, akkor $x+y$ értéke:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) nem határozható meg egyértelműen.

11/17. Egy focipályán a szögletzászló mellé van letéve a labda. A szögletzászló rúdja 1,2 m magas, a rúd árnyéka 1 m hosszú. A labda árnyékának legtávolabbi pontja a talajjal való érintkezési pontjától 28 cm távolságra van. Egészekre kerekítve hány cm a labda átmérője?

(A) 23 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) 34

11/18. Hány olyan p egész szám létezik, amely esetén a $2x^2-3x+\log_4 p=0$ egyenletnek van valós gyöke?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

11/19. A $\cos^3 x\cdot\sin x-\sin^3 x\cdot\cos x\geq\frac{1}{8}$ egyenlőtlenség megoldásait a számegyenesen kékkel jelöltük. A $[0;3\pi]$ intervallum hányad része kék?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{4}$

11/20. Egy 4 dm magas henger alakú pohár alaplapjának kerülete 6 dm. A külső felületén az aljától 1 cm távolságra ül egy hangya. A pohár belső felületén a felső peremtől 1 cm-re, a hangyától a lehető legtávolabb van egy mézcsepp. Hány dm az a legrövidebb út, amelyen a hangya eljuthat a mézig?

(A) 4,84 (B) 5 (C) 5,2 (D) 6 (E) 7

12/23. 240 egységkockából egy $4\times6\times10$-es téglatestet készítünk. Az egységkockák csúcsai hány olyan téglatestet határoznak meg, amelyeknek az oldallapjai az eredeti téglatest oldallapjaival párhuzamosak?

(A) 11550 (B) 4050 (C) 2000
(D) 385 (E) 240

12/24. Hány megoldása van az $1+[x]=(x^2-1)^2$ egyenletnek? ($[x]$ az x egész részét jelenti)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

12/25. Egy 5 egység sugarú félkörbe úgy írunk téglalapokat, hogy két csúcsuk a körvonalon van, egyik oldaluk pedig az átmérőre esik. Melyik állítások igazak az alábbiak közül?

α) A téglalapok területe legfeljebb 25 terület egység lehet.

β) A maximális területű téglalapnak 4 szimmetriatengelye van.

γ) Van olyan téglalap, amelynek területe úgy aránylik a félkör területéhez, mint 2 : 3.

(A) csak α (B) β és γ (C) α és γ
(D) csak γ (E) egyik sem

12/26. Egy 80 tagú számsorozatról tudjuk, hogy bármely közbülső tagja egyenlő szomszédainak szorzatával, továbbá az első 40 tag szorzata 8, valamint az összes tag szorzata is 8. Mennyi a sorozat első és második elemének összege?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 6
(E) ezekből az adatokból nem határozható meg

12/27. Az alábbiak közül hány (nem feltétlenül egybevágó) szabályos háromszögre nem darabolható fel egy a oldalú szabályos háromszög?

(A) 2000 (B) 1999 (C) 9
(D) 7 (E) 5

(Megoldókulcs: BBACD DECBC BBDAB ADADE)

Urbán János

A XXIX. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület 2000. június 26-28-ig rendezte meg a 29. Kalmár László Országos Matematikaverseny döntőjét Vácott.

Az 5-8. osztályos tanulók számára rendezett verseny döntőjébe 94 tanuló jutott be az ország minden részéből. A négy évfolyamon a legjobb helyezéseket a következő tanulók érték el:

5. osztály

1. Kunovszki Péter, Mohács, Brodarics Téri Ált. Iskola (tanárai: Kul Mátyásné és Kunovszki István),
2. Sümegi Károly, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn. (tanára: Csiszár Mária),
3. Dudás János, Hódmezővásárhely, Központi Ált. Iskola (tanára: Árva Józsefné).

6. osztály

1. Paulin Roland, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Ált. Iskola és Gimn. (tanára: Kovács Csongorné),
2. Acsai Péter, Nagykőrös, Petőfi Sándor Általános Iskola,
3. Pesti Veronika, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn. (tanára: Erdős Gábor),

7. osztály

1. Birkner Tamás, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Ált. Iskola és Gimn. (tanára: Táborné Vincze Márta),
2. Rácz Miklós, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Ált. Iskola és Gimn. (tanára: Rubóczky György),
3. Seres Gyula, Nyírkáta, Általános Iskola (tanára: Grenella Éva).

8. osztály

1. Rácz Béla András, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Ált. Iskola és Gimn. (tanára: Fazakas Tünde és Hraskó András),
2. Kórus Péter, Szeged, Radnóti Miklós Gimn. (tanára: Kosztolányi József),
3. Puskás Anna, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Ált. Iskola és Gimn. (tanára: Fazakas Tünde és Hraskó András),

A verseny döntőjének két napján a versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

Ötödik osztály
1. nap

1. A következő összeadásban azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Mit jelentenek az egyes betűk?

$$BEEE + B = MUUU$$

2. Színezzed ki a 16 pontot két színnel, például pirossal és kékkel úgy, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a 4 csúcsa azonos színű!

o o o o
o o o o
o o o o
o o o o

3. Újabban angol mintára gyakran így írják le például 2000. június 26-át: 00.06.26. A 2000-től 2010-ig tartó 11 év alatt hány olyan dátum van, amelyet ha így írunk le, akkor a hónapot és napot jelző számok szorzatának utolsó két jegye megegyezik az évet jelölő számmal?

4. Egy négyzetet 4 egyenessel hány részre lehet vágni? (Minden egyenes belevág a négyzetbe!) Vizsgáljad meg az összes lehetséges esetet!

Hatodik osztály
1. nap

1. Milyen számjegyeket kell írni a *-ok helyére, hogy a tízes számrendszerben felírt

   32*35717*

   szám osztható legyen 72-vel?

2. Egy kockát 4 síkkal legalább és legfeljebb hány részre lehet vágni? Feltesszük, hogy mind a 4 sík belevág a kockába.

3. Fel lehet-e rakni 7 darab 3 tonnás teherbírású autóra a következő 50 ládát, amelyek tömege sorra: 370 kg, 372 kg, 374 kg, 376 kg, ..., 468 kg?

4. Három és négy óra között pontosan hány órakor zár be az óra kis- és nagymutatója éppen 180°-os szöget?

Hetedik osztály
1. nap

1. Hány éves Marci és az öccse, Dani, ha tudjuk, hogy Marci életkorának négyzetéhez hozzáadva Dani életkorát, 176-ot kapunk, ha pedig Dani életkorának négyzetéhez adjuk Marci életkorát, akkor 62 adódik?

2. Egy 60°-os szög mindkét szárát érinti egy 2 egység sugarú kör. Milyen messze van a kör középpontja a szög csúcsától?

3. Andi és Bence a következő „számkitalálós" játékot játsszák. Andi gondol egy páros számra, majd a következő lépéseket végzi: a számot megszorozza 2-vel, az eredményhez 1-et ad, ezután a kapott eredményt szorozza 2-vel, majd az így kapott számhoz 1-et ad és így tovább. A leírt műveletet annyiszor végzi el Andi, ahányszor akarja, majd a végeredményt megmondja Bencének. Bence rövid gondolkodás után kitalálja, hányszor végezte el Andi a leírt lépéseket, és milyen számra gondolt. Magyarázzuk meg Bence gondolatmenetét!

4. Egy szabályos 10-szög összes oldalát és átlóját meghúztuk. Hány olyan háromszög keletkezett így, amelynek csúcsai a 10-szög csúcsai közül valók?

5. Igaz-e a következő állítás: egy konvex négyszög bármely belső pontjának a csúcsoktól mért távolságösszege kisebb, mint a négyszög kerülete?

Nyolcadik osztály
1. nap

1. Van-e olyan pozitív egész szám, amelyet négyzetre emelve és a kapott szám számjegyeit összeadva
   a) 2001-et kapunk?
   b) 2002-t kapunk?

2. Az A, B és C pontok úgy helyezkednek el egy síkon, hogy a sík tetszőleges P pontjára igaz, hogy az AP távolság rövidebb a BP és CP távolságok valamelyikénél. Hogyan helyezkednek el az A, B, C pontok?

3. Adottak a síkon az O, P_1, P_2, ..., P_{99} pontok úgy, hogy semelyik három sem esik egy egyenesbe, és adott a síkon egy O-n áthaladó e egyenes, amelyről tudjuk, hogy az egyik oldalán a P_i $(1 \le i \le 99)$ pontok közül éppen 48 van. Van-e olyan f egyenes a síkon, amely áthalad O-n, és az egyik oldalán

a) 49 darab P_i pont van,

b) 47 darab P_i pont van?

4. A $2 \le x \le 5$ feltételnek eleget tevő valós számok körében értelmezzük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 4}.$$

Hol veszi fel ez a függvény a legnagyobb és legkisebb értékét, és mennyi ez az érték?

5. Adott a síkon az egységnyi területű ABC háromszög, és ketten, X és Y a következő játékot játsszák. Először X kijelöl az AB oldalon egy P pontot, azután Y jelöl ki a BC oldalon egy Q pontot, végül megint X jelöl ki a CA oldalon egy R pontot. X-nek az a célja, hogy a keletkező PQR háromszög területe a legnagyobb legyen, Y-nak pedig az a célja, hogy a PQR háromszög területe a legkisebb legyen. Mekkora lesz a PQR háromszög területe, ha mindketten jól választanak?

Ötödik osztály
2. nap

1. Bori és Andi a következő játékot játsszák: Bori gondol egy háromjegyű számra, ezt kétszer egymás után leírja egy papírra, majd az így kapott hatjegyű számot elosztja 7-tel, az eredményt elosztja 11-gyel, végül az így kapott eredményt elosztja 13-mal. (Az osztás eredménye mindig egész szám.) A kapott számot megmondja Andinak. Andi ebből azonnal, számolás nélkül kitalálja a gondolt számot. Magyarázzad meg az okát!

2. Ketten futják végig az 1 km-es távolságot. A lépései $\frac{1}{10}$-del rövidebbek, mint B lépései, de A egy lépést $\frac{1}{10}$-del rövidebb idő alatt tesz meg, mint B. Ki ér előbb célba, ha egyszerre indulnak?

3. El lehet-e helyezni a síkon 6 szakaszt úgy, hogy mindegyiknek 3 másik szakasszal legyen közös pontja? És 7 szakaszt el lehet-e helyezni ugyanígy?

4. Van-e olyan tízes számrendszerbeli tízjegyű A szám, amelyhez ha hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével (fordított sorrendben írásával) kapott B számot, akkor $A + B$ értéke egy csupa 9-es számjegyből álló tízjegyű szám? Van-e ilyen tulajdonságú 9 jegyű szám?

Hatodik osztály
2. nap

1. Az összes 0-tól különböző számjegyet pontosan egyszer használva írjunk fel olyan prímszámokat (törzsszámokat), amelyeknek az összege a lehető legkisebb!

2. Egy táblára felírták 1-től 2002-ig az egész számokat. Egy lépésben bármelyik két számot letörölhetjük, és helyükre az összegüket vagy a különbségüket írhatjuk. Előfordulhat-e, hogy 2001 ilyen lépés után a 2 marad a táblán?

3. Igaz-e, hogy bármely konvex nyolcszögnek van két olyan átlója, amelyek legfeljebb 12°-os szöget zárnak be?

4. Anti és Béla együtt elvállaltak egy bizonyos munkát, amit ketten 24 nap alatt végeztek el. Anti csak $\frac{2}{3}$ annyit végzett, mint Béla. Hány nap alatt végezték volna el ezt a munkát külön-külön?

Hetedik osztály
2. nap

1. Négyzetszám-e a következő kivonás eredményeként kapott szám:

11111112222222-333333?

2. Melyik az a három prímszám, amelyek szorzata 7-szerese az összegüknek?

3. Az $ABCD$ trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak ($AB > CD$) és az AC, BD átlók metszéspontja P. Tudjuk, hogy az ACD háromszög területe 5 egység, a PCD háromszög területe pedig 1 egység. Mekkora a trapéz területe?

4. Ketten, A és B a következő játékot játsszák: egy sorban – jelek vannak írva, A először egy vagy két szomszédos – jelből + jelet csinál, ezután B teszi ugyanezt, majd megint A lép és így tovább. Az nyer, aki az utolsó – jelből + jelet csinál. Ki nyer, ha eredetileg 9 - jel van a sorban, és ha 10 – jel van egy sorban? Milyen stratégiát követ a győztes?

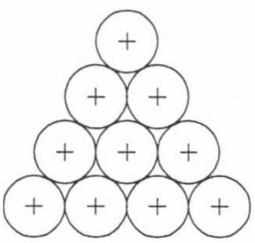
Nyolcadik osztály
2. nap

1. Az n pozitív egész számról tudjuk, hogy két szomszédos négyzetszám közé esik, mégpedig a kisebbik négyzetszámnál p-vel nagyobb, a nagyobbiknál q-val kisebb. Igazoljuk, hogy $n - pq$ négyzetszám!

2. Adott a síkon két pont, A és B. Hol helyezkednek el a síkon azok a P pontok, amelyekre igaz, hogy ha P-ből B felé indulunk egy egyenes mentén, akkor a mozgó pont A-tól mért távolsága egyre nő?

3. Néhány pozitív egész számról tudjuk, hogy a köbeik (harmadik hatványaik) összege osztható 6-tal. Mutassuk meg, hogy ekkor a számok összege is osztható 6-tal!

4. Az ábrán látható módon $\frac{n(n+1)}{2}$ egybevágó korongot egy szabályos háromszögben raktunk össze (ábránkon $n = 4$). A korongok felső felén + jelek, alsó felén – jelek vannak. Egy lépésben 3, egymással páronként érintkező korongot megfordíthatunk. Mely n-ekre igaz, hogy véges sok lépésben elérhető, hogy az összes korongon a – jel legyen felül?



Dr. Hack Frigyes

Két megjegyzés Kocsis Orsolya tanulmányához[1]

Az első megjegyzés a Szerzőnek szól. Inkább kiegészítés némi bírálattal. A 4. tétel-tulajdonság fogalmazása nem igazán sikerült, ami az új témáknál elő szokott fordulni. Amikor a feltételben az áll, hogy „Legyen n_0 rögzített, m pedig *tetszőleges természetes szám.*" – (kiemelés tőlem) – akkor nem szerencsés az állításban „periódusról" beszélni. Ez ugyanis a sorozatokhoz kötődő fogalom. A dilemma feloldható, ha m helyett az $\{m\}_{m=0}^{\infty}$ sorozatról és az n_0 konstanssal generált $\{n_0 \wedge m\}_{m=0}^{\infty}$ sorozatról szólunk. A szóban forgó tulajdonság azonban sorozatok és periódusok nélkül is megfogalmazható.

Ha r és s természetes számok kongruensek modulo p, ahol $p = 2^{[\log_2 n_0]+1}$, akkor $n_0 \wedge r = n_0 \wedge s$.

A másik megjegyzés sokaknak, talán mindenkinek szól. A számítógépek elterjedése magával hozta a formális logika ismeretének szükségét. Az idők során kiderült, hogy ezen algebrai struktúra megismerése nem csupán a számítógép áramköreinek működéséhez visz közelebb, hanem az információ feldolgozásánál, elsősorban a keresések megfogalmazásánál a mindennapi életben is nélkülözhetetlen. Nem csoda hát, hogy tanult kartársnőnk is felfigyelt a műveletek értelmezési körének kiterjesztési lehetőségére. Akármilyen környezetben is találkozunk e három logikai művelettel, a téma tárgyalásánál megfigyelhetjük a szóhasználat sutaságát, amelyet a megfelelő terminusz technikuszok hiánya okoz. Gyakran olvastam tudományos dolgozatokban és tankönyvekben egyaránt, hallottam előadáson, tanórán és vizsgán olyan botladozó megfogalmazásokat, mint „ha *a*-t és *b*-t *összeéseljük*...", „*x* és *y vagy-ja*....", „az *u,v éselés* negációja..." stb.

A gond forrása nem titok: e három műveletthez még nem alakultak ki a magyar kifejezések. Akkor, amikor még a tudomány nemzetközi nyelve a latin volt, ilyen nehézségek nem adódtak, hiszen akik az adott területtel foglakoztak, nem igényelték a magyarítást. Ne felejtsük el azonban, hogy nem fordítjuk le a matematika minden fogalmát sem mi, sem más nemzetek anyanyelvükre. A néphadseregben ugyan „összrendezői rendszernek" nevezték a koordinátarendszert, de a latint nem tanuló középiskolásnak nem okoznak problémát az ilyen szavak, mint vektor, iránytangens, limesz, integrál, deriválás, ordináta, abszcissza stb. És ekkor a kémia, biológia szókincséről még nem is beszéltünk. Nem kell tehát a *konjunkció, diszjunkció, negáció* esetében sem szigorúan és mereven a magyarítás mellett dönteni. A szükséges derivátumokat azonban rögzíteni kell. A mintát az aritmetikai műveletekről vehetjük. Az alábbi táblázatban ez utóbbiaknak az általánosan használt és a logikai műveleteknek a **javasolt** kifejezéseit mutatom meg:

Művelet	Operátor	Operáció	Operandusok	Eredmény
összeadás	meg, plusz +	összeadni	tagok	összeg
kivonás	-ból, minusz -	kivonni	kisebbítendő kivonandó	különbség
szorzás	-szor x •	szorozni	tényezők	szorzat
osztás	-ban, per /	osztani	osztandó osztó	hányados
konjunkció	ÉS, AND ∧&	**konjungálni**	operandusok	konjungált
diszjunkció	VAGY, OR ∨	**diszjungálni**	operandusok	diszjungált
negáció	NEM, NOT ¬	**negálni**	operandus	negált

[1] Logikai műveletek a természetes számok halmazán. – *A Matematika Tanítása VIII./3.sz. (2000)*

KÖNYVAJÁNLÓ

Újvári István

Ha Dürer ma élne... Matematikaversenyek művelődéstörténeti feladványokkal

(Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő, Vác, 1999.)

A könyv érdekes, szokatlan feladatokat tartalmaz. A 66 részletesen megoldott feladatsorban indulásként egy-egy matematika feladatot találunk, azután ennek eredményéből, mint évszámból kiindulva egy sor történelmi, irodalmi, természettudománnyal, művészettel, sporttal kapcsolatos kérdést tesz fel a szerző. Ilymódon egészen természetesen kapcsolódik össze a matematika a humán műveltséggel.

Az ilyen jellegű feladatok megoldását csak úgy lehet elképzelni, ha több idő van rá, otthoni, könyvtári, „kutatómunka" segíti a megoldó ötleteit, gondolatait.

A feladatok ötletesek, újszerűek, nem igen található meg ilyen komplex, sokoldalú ismereteket kívánó feladatgyűjtemény az elérhető irodalomban. Aki kedvet kap hasonló feladatok készítésére, az a második résztől remélhet segítséget.

Természetesen a művelődéstörténeti feladatokban sok Vác városához kapcsolódó adatot találunk, hiszen a feladatok keletkezése Váchoz kötődik, és az első kipróbálása Vácott és Vác környékén volt.

Ennek mintájára más városok helytörténetéhez is kapcsolódhatnak hasonló feladatok.

Mindent egybevetve érdekes, újszerű, ötletes feladatokat olvashatunk a könyvben, amelyek a gyakorlatban, a tanári munkában is jól hasznosíthatók.

Újvári István könyvét melegen ajánljuk a matematika tanárok, érdeklődő tanulók figyelmébe.
(Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő, 2601 Vác, Pf. 143.)

* * *

Örömmel adunk hírt arról, hogy 2000. májusában **Brassó**ban (Románia) megjelent az **Erdélyi Matematikai Lapok** magyar nyelvű első száma. A „füzetkét" elsősorban diákok szerkesztik. Olvasható benne néhány matematikatörténettel foglalkozó cikk, és részben a diákok által kitűzött, megoldásra szánt feladatok 5.-től 9. osztályos tanulók számára.
Érdeklődve várjuk a folytatást!

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék **(Figyelem, a cím megváltozott!):** 6757 Szeged, Miklós u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 2000. november 30.**

155. Legyen n egy adott összetett természetes szám. Adjuk hozzá n-hez valamely d valódi osztóját. A kapott $n + d$ számmal ismételjük meg ugyanezt, és így tovább. Mutassuk meg, hogy ha $n = 4$, akkor az összes összetett szám előállítható a fenti operáció véges sokszori alkalmazásával!

Városok Viadala, 1993.

156. Tekintsük az ABC háromszöget és a körülírt körét. Legyen A_1 az A-t tartalmazó átmérő másik végpontja, A_0 a BC oldal felezőpontja, A_2 pedig az A_1 pont A_0-ra vonatkozó tükörképe. B_2 és C_2 hasonló módon nyerhetők a B, illetve C pontokból kiindulva. Bizonyítsuk be, hogy A_2, B_2 és C_2 egybeesnek!

Városok Viadala, 1994.

157. A pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozatra teljesül, hogy bármely pozitív egész n esetén az $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ egyenletnek van valós gyöke. Van-e ilyen tulajdonságú végtelen sorozat? Adjunk meg egy 10 tagból álló megfelelő sorozatot!

Városok Viadala, 1994.

158. Igazoljuk a következő azonosságot!

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{[k/2]}\cdot 2^{n-k}=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}$$

($[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.)

Dályay Pál Péter, Szeged

159. Adott a síkon egy egységnyi sugarú kör és néhány sáv (két párhuzamos egyenes által meghatározott síkrész). A sávok szélességének összege 100. Mutassuk meg, hogy a sávok eltolhatók úgy, hogy együttesen lefedjék a körlapot!

Városok Viadala, 1997.

Feladatmegoldások (140-144. feladatok)

140. Mely pozitív egész n értékek esetén egész szám az $\left(1999+\frac{1}{2}\right)^n+\left(2000+\frac{1}{2}\right)^n$ kifejezés értéke?

Megoldás: Legyen $a = 1999$ és $b = 2000$. A feladat kérdése ekvivalens azzal, hogy 2^n mely pozitív egész n értékek esetén osztója a $(2a + 1)^n + (2b + 1)^n$ kifejezésnek.

Ha n páros, akkor a fenti kifejezés mindkét tagja 1 maradékot ad 4-gyel osztva, így összegük nem osztható 4-gyel, ezért 2^n -nel sem. Tehát páros n értékekre nem kapunk egész számot.

Ha n páratlan, akkor kifejezésünk szorzattá alakítható:

$$(2a+1)^n+(2b+1)^n=$$
$$=2\cdot(a+b+1)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(2a+1)^{n-1-k}(2b+1)^k.$$

A jobb oldali kifejezésben az összegzés eredménye biztosan páratlan, ugyanis páratlan sok párat-

lan számot adunk össze. Mivel $2 \cdot (a + b + 1) = 8000 = 2^6 \cdot 5^3$, ezért $n \leq 6$ és páratlan, azaz n lehetséges értékei: 1, 3, 5.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

141. Igazoljuk, hogy ha az x és y pozitív számok kielégítik az

$$1999^x + 1999^y = 2000$$

egyenletet, akkor $x + y > 1$!

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: A állítást indirekt úton igazoljuk. Tegyük fel, hogy x és y olyan pozitív számok, amelyek kielégítik az adott egyenletet, és $x + y \leq 1$. Ha $x + y \leq 1$, akkor $y \leq 1 - x$. Felhasználva, hogy az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő az

$$1999^x + 1999^{1-x} \geq 2000$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezt alakítva

$$(1999^x)^2 - 2000 \cdot 1999^x + 1999 \geq 0,$$

ahonnan

$$(1999^x - 1999) \cdot (1999^x - 1) \geq 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x \geq 1$ vagy $x \leq 0$. Ha $x \geq 1$, akkor indirekt feltevésünk értelmében $y \leq 0$, ami ellentmond annak, hogy y pozitív. Ha $x \leq 0$, akkor szintén az alapfeltevéssel jutunk ellentmondásra.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Kiss Géza, Kisújszállás
Schutzbach Mártonné, Siófok

A megoldók száma: 12.

142. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n és $x_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ esetén

$$\frac{x_1^2 - x_1 + 1}{x_2^2 + x_2 + 1} + \frac{x_2^2 - x_2 + 1}{x_3^2 + x_3 + 1} + ... + \frac{x_n^2 - x_n + 1}{x_1^2 + x_1 + 1} \geq \frac{n}{3}!$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Előbb azt látjuk be, hogy tetszőleges $i \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén

$$\frac{x_i^2 - x_i + 1}{x_i^2 + x_i + 1} \geq \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Mivel (1) nevezője mindig pozitív, ezért beszorozhatunk vele. Ezek után rendezzük 0-ra a kapott egyenlőtlenséget. Kapjuk, hogy

$$2 \cdot (x_i - 1)^2 \geq 0,$$

ami állításunkat igazolja. Megkaptuk azt is, hogy (1)-ben egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_i = 1$.

A feladatbeli egyenlőtlenség bal oldalán álló tagok mind pozitívok, ezért alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x_1^2 - x_1 + 1}{x_2^2 + x_2 + 1} + \frac{x_2^2 - x_2 + 1}{x_3^2 + x_3 + 1} + ... + \frac{x_n^2 - x_n + 1}{x_1^2 + x_1 + 1} \right) \geq \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_i + 1}{x_i^2 + x_i + 1}}. \qquad (2)$$

(2) jobb oldalát (1) alapján alulról becsülve kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: A fenti módon igazolható a következő általánosabb egyenlőtlenség is:

Bármely olyan a és b pozitív valós számokra, amelyekre $a < b$, valamint bármely pozitív egész n és $x_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ esetén

$$\frac{x_1^2 - 2ax_1 + b^2}{x_2^2 + 2ax_2 + b^2} + \frac{x_2^2 - 2ax_2 + b^2}{x_3^2 + 2ax_3 + b^2} + ... + \frac{x_n^2 - 2ax_n + b^2}{x_1^2 + 2ax_1 + b^2} \geq \frac{n \cdot (b - a)}{b + a}.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 14.

A **143.** feladat szövege a lap 2000/1. számában hibásan jelent meg, helyesen kitűztük a 2000/2. számban, így annak megoldását lapunk következő számában ismertetjük.

144. Egy pozitív egész számot *szerencsés*nek nevezünk, ha előáll olyan (nem feltétlenül különböző) pozitív egészek összegeként, amelyek reciprokainak összege 1. Például a 11 *szerencsés*, ugyanis $11 = 2+3+6$ és $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

*Szerencsétlen*nek nevezzük azokat a számokat, amelyek nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal. Hány *szerencsétlen* szám van?

Megoldás: A feladatban feltett kérdésre a válasz: Pontosan 13 darab szerencsétlen szám van. Ennek megmutatása végett először vizsgáljuk meg kicsi pozitív egészek „szerencsésségét".

Ehhez a vizsgálathoz fel fogjuk használni a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget:

$$n^2 \le \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Ha k szerencsés, és $k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, akkor $k \ge n^2$, ami azt jelenti, hogy az n tagból „összerakot" szerencsés szám legalább n^2. Pontosan n^2 akkor adódik, ha az n darab tag mindegyike n. A négyzetszámok tehát mindannyian szerencsés számok.

A legkisebb szerencsés szám az 1. A következőkhöz már legalább két tagot fel kell használnunk, így azok összege legalább 4. A **2** és a **3** tehát szerencsétlen számok. A 4 szerencsés, és könnyen látható, hogy nincs több két tagból összetevődő szerencsés szám. (Az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ diofantoszi egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van, az $x = 2$, $y = 2$.)

Mivel a három tagból összetevődő szerencsés számok értéke legalább 9, ezért az **5, 6, 7, 8** szerencsétlen számok. A 9 a legkisebb háromtagú szerencsés szám. A többi háromtagú szerencsés szám esetében nem lehet a tagok mindegyike legalább 3, így legalább az egyik 2. Ekkor az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ diofantoszi egyenlet pozitív megoldásait kell megkeresnünk. Az egyenletet átalakítva $(x-2)(y-2) = 4$, ahonnan $x = 3$, $y = 6$ vagy $x = 4$, $y = 4$. Így a 10 és a 11 is szerencsés számok.

A további szerencsés számok legalább négytagúak, és a legkisebb ilyen a 16, ezért a **12, 13, 14, 15** szerencsétlen számok. A 16-nál nagyobb négytagú szerencsés számok esetén nem lehet minden tag legalább 4, így a 2-nek vagy a 3-nak is elő kell fordulnia a tagok között. Így háromismeretlenes diofantoszi egyenleteket kell vizsgálnunk. Ennek részletezésétől most eltekintünk, de megjegyezzük, hogy a következő szerencsés számok adódnak: 17,18, 20, 22, 24, 29, 30, 32, 37, 54. A **19, 21, 23** számok nem állnak elő a megfelelő módon, így ők szerencsétlenek.

A továbbiakban olyan módszert keresünk, amellyel hatékonyan tudunk előállítani sok szerencsés számot. Legyen k egy n darab pozitív egész összegeként előálló szerencsés szám.

$$k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

és

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1.$$

Osszuk 2-vel a reciprokos egyenlet mindkét oldalát, majd adjunk hozzá 1/2-et. Kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\ldots+\frac{1}{2a_n}+\frac{1}{2}=1,$$

azaz, ha k szerencsés, akkor $2k+2$ is az. Sőt, figyelembe véve, hogy $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $2k+8$ és $2k+9$ is szerencsés. Ezek alapján, ha találunk olyan k szerencsés számot, amelyre k-tól $2k+7$-ig mindegyik szám szerencsés, akkor, felhasználva, hogy $2k+8$ és $2k+9$ is szerencsés, indukcióval adódik, hogy minden további pozitív egész szerencsés lesz. Az eddig talált legnagyobb szerencsétlen szám a 23, ezért legyen $k = 24$. Az eddigieket felhasználva egyszerű számolással adódik, hogy 24-től 55-ig minden szám szerencsés, így beláttuk, hogy csak a felsorolt 13 darab szám szerencsétlen.

Kiss Géza, Kisújszállás

Megjegyzés: A következőkben ismertetünk néhány olyan tételt, amelyeket megoldóink felhasználtak megoldásaik során, és önmagukban is érdekesek.

Dályay Pál Péter (Szeged) a következő tételeket bizonyította megoldása során:

1. Tétel: Ha az $a_i \in \mathbb{Z}^+$ $(i = 1, 2, ..., k)$ számokra $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$, és x_i $(i = 1, 2, ..., k)$ szerencsés számok, akkor az $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k$ szám is szerencsés.

2. Tétel: Ha x szerencsés számra $x = \sum_{i=1}^{k} a_i$ és $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1,$, akkor $a_j \left| \prod_{i \neq j} a_i \right.$ minden $j \in \{1, 2, ..., k\}$ esetén.

Vörös Zoltán (Tiszavasvári) bebizonyította, hogy szerencsés számok szorzata is szerencsés.

A megoldók száma: 4.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (142.); Dályay Pál Péter, Szeged (140., 141., 142. 2 mód, 143. 2 mód, 144.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (140-142.); Kiss Géza, Kisújszállás (141-144.); László Sándor, Szombathely (140., 141., 142. 2 mód, 143.); Mészáros József, Galánta (140., 142.); Molnár István, Gyula (140-143.); Schutzbach Mártonné, Siófok (141.); Simon József, Csíkszereda (140., 142-144.); Szász Róbert, Marosvásárhely (140-143.); Tamás Sándor, Csíkszentgyörgy (140-143.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (140-143.); Udvardi Tibor, Baja (141-143.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (140-144.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (140-143.).

Több mint 250 feladat versenyekre készülő diákoknak

A feladatgyűjtemény a Kalmár László Matematikaverseny 1994 és 1998 közötti megyei és országos fordulóinak feladatait, valamint azok megoldásait tartalmazza. A kötet hasznos segítséget nyújthat a versenyekre való felkészüléshez tanárnak, diáknak egyaránt, de színesítheti a szakköri és a tanórai munkát is. Tanár szakos egyetemisták, főiskolások részére is ajánlható feladatösszeállítást tartalmaz.

Megjelenés előtt a Bátaszéki Matematikaverseny feladatai és megoldásai 1990–2000

Szép Magyar Könyv díjas tankönyvsorozat

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 470-101, 488-282
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73., Tel.: (62) 485-522

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Hát, nem tudom... (A szegedi Rátz László Vándorgyűlés záródolgozata)

(Csorba Ferenc)

Harmadfokú függvények szélsőérték vizsgálata elemi módon

(Árokszállási Tibor)

Az általános talpponti háromszög területe

(Dr. Darvasi Gyula)

VIII. ÉVFOLYAM 2000 5

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 880 Ft
A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda Kft.-ben

TARTALOM

Hát, nem tudom...
(A szegedi Rátz László Vándorgyűlés záródolgozata)
Csorba Ferenc szaktanácsadó, Győr

Harmadfokú függvények szélsőérték vizsgálata elemi módon
Árokszállási Tibor tanár, Paks

Az általános talpponti háromszög területe
Dr. Darvasi Gyula docens, Nyíregyháza

Egy TIMSS japán matematikafeladat
Dr. Darvasi Gyula docens, Nyíregyháza

Varázslatos sokszögek I.
Z. P. Dienes professzor, Kanada

Az 1997-1999. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák (AHSME) feladatai és megoldási kulcsai I.
Dr. Kántor Sándorné adjunktus, Debrecen

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Csorba Ferenc

Hát, nem tudom...

(A szegedi Rátz László Vándorgyűlés záródolgozata)

Gondoltam, ha már záródolgozatot kell írni, akkor a lopott anyag mellé lopok egy címet is: Hát, nem tudom... Jiří Menzel azonos című könyve után szabadon. A tartalmi részhez az ötletet Pintér Lajos: „Így kell csinálni, vagy másképp...", illetve Szalay István: Feladatok kettős látásmódban című előadásai adták.

Az Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából (közkedvelt néven „zöld könyv") 2328-as számú feladata a következő:

Egy négyoldalú egyenes hasábról tudjuk, hogy magassága 1 m, alaplapja pedig olyan szimmetrikus trapéz, amelynek három oldala 60 cm hosszúságú. Mekkora lehet maximálisan a hasáb térfogata?

A megoldáskötetben a következőt találjuk:

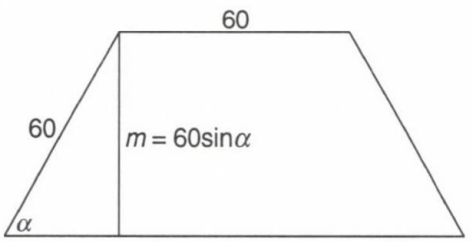
A hasáb térfogata akkor maximális, ha az alapterület is maximális. A trapéz hegyesszöge legyen α, ekkor a hosszabb alap: $60 + 60 \cdot 2\cos\alpha$, a magasság $60\sin\alpha$, a terület pedig $\frac{60 \quad 60 \quad 2 \; 60\cos\alpha}{2} \cdot 60\sin\alpha =$ $= 60^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$. Az $f(\alpha) = (1 + \cos\alpha)\sin\alpha$ függvény maximumát kell meghatároznunk a $0, \frac{\alpha}{2}$ intervallumban. A derivált 0 helye a $-\sin^2\alpha + (1 + \cos\alpha)\cos\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 =$ $= 0$ egyenletből $\cos\alpha \quad \frac{1}{2}$ esetén $\alpha \quad \frac{\pi}{3}$, s mivel itt a derivált pozitívból negatívba megy át, helyi maximum van, $f \frac{\pi}{3} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4}$; ez nagyobb, mint az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékek, s így abszolút maximum is. A maximális térfogat $\frac{100 \; 60^2 \; 3\sqrt{3}}{4}$ $=467\,653{,}72\ \text{cm}^3$.

Ezt a feladatot akár érettségi írásbelin is ki lehetne tűzni. Kíváncsi lennék, hány olyan tanuló akadna, aki nem tanult differenciálszámítást, s mégis ezzel a módszerrel oldaná meg. (Meggyőződésem, hogy a „zöld könyv" rengeteget árt a matematikának. Az utolsó évben (jó esetben) a legtöbben nem matematikát, hanem „zöld könyvet" tanítunk.)

Ez egyik kedvenc feladatom, szinte minden osztályban megbeszéljük, mégsem örülnék, ha tanítványaim érettségin találkoznának vele.

A feladat nagyon szép, ha lenne elég idő, ezen keresztül meg lehetne ismertetni diákjainkat a matematika szépségeinek egy jó részével. Nyilvánvaló, hogy a térfogat csak az alaplap területétől függ. Meg szoktam kérdezni, milyen eredményt várunk. A diákok szinte kivétel nélkül négyzetre tippelnek. Ezután tükrözzük a trapézt az ismeretlen oldalára. Olyan hatszöget kapunk, amelynek minden oldala egyenlő. Itt már az a sejtés, hogy akkor lesz a terület maximális, ha a hatszög szabályos.

Elérkeztünk egy híres problémához, az ún. izoperimetrikus feladatokhoz. Szokás Dido-féle problémának is nevezni. Dido Muton türoszi király leánya volt, atyja halála után nagybátyjának, Akerbasnak, Melkart papjának lett a felesége. Dido fiútestvére Pügmalion, Türosz királya kapzsiságból megölette sógorát, Dido kincseivel menekült, új hazát keresett. Utika közelében kötött ki Afrika északi partján, és Jarbas numí-



1. ábra

diai királytól megvásárolt egy várat, amelynek Borza nevét a görögök Bürsának ejtettek, ami bőrt jelent. Innen eredhet az a monda, hogy Dido csak annyi földet kért Jarbastól, amit egy ökör bőre betakar, de ezt a bőrt vékony csíkokra hasíttatta, úgy hogy jókora területet nyert. (Nagyon valószínű, hogy Dido azonos Astarte istennővel, Karthago védőasszonyával, akit történelmi alakká formált át a néphagyomány.)

A matematikusoknak ezzel a következő kérdést tette fel: adott kerületű síkidomok közül melyiknek a területe a legnagyobb?

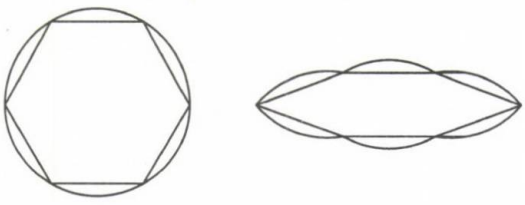
Ezt az alapvető kérdést Jakob Steiner svájci matematikus oldotta meg először. Több bizonyítást is adott a következő tételre: Az összes egyenlő kerületű síkidom közül a kör területe a legnagyobb, illetve az összes egyenlő területű síkidom közül a körnek legkisebb a kerülete. (A Steiner-féle bizonyításokban vannak „gyenge" pontok, de ezeket W. Blaschke: Kreis und Kugel című könyvében megoldotta, a bizonyításokat „teljesen szigorúvá" tette.)

Elfogadva ezt az eredményt, megmutatjuk, hogy az egyenlő oldalú hatszögek közül a szabályos hatszög területe a legnagyobb. (A bizonyítás elmondható tetszőleges n oldalú sokszögre.)

Elegendő konvex hatszögeket tekinteni, ez nyilvánvaló. Tekintsük a 60 cm oldalú szabályos hatszöget és a köré írható kört. Ebből a körből a szabályos hatszög oldalai egy-egy körszeletet vágnak le, amelyeket illeszthetünk a 60 cm oldalakkal rendelkező, nem szabályos hatszög oldalaihoz. Kapunk egy síkidomot, ami nem kör, de kerülete megegyezik a kör kerületével. Elhagyva mindkettőből a körszeleteket, látható, hogy a szabályos hatszög területe lesz a nagyobb.

Ágyúval lőttünk a verébre, de mentségünkre szól, hogy eltaláltuk.

Nagyon szép a feladat. Ha lenne idő, vissza lehetne térni Pitagorasz tételéig, átismételni a magasság- és a befogótételt, kitérni a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségre. Elegendő lenne megmutatni, hogy ha a, b, c és d pozitív valós számok, akkor $\frac{a\ b\ c\ d}{4} \geq$ $\geq \sqrt[4]{abcd}$ mindig fennáll, egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b = c = d$, valamint hogyan lehet ezt szélsőérték feladatok megoldásánál alkalmazni (és hogyan nem!). Mindezeket feltételezve oldjuk meg a feladatot másképp!



2. ábra

A trapéz területe:

$$T \quad \frac{a\ 60}{2} m,$$

$$m^2 = 60^2 - x^2 = 60^2 - \left(\frac{a\ 60}{2}\right)^2 =$$

$$= 60\ \frac{a\ 60}{2}\ 60\ \frac{a\ 60}{2} =$$

$$\frac{60\ a}{2}\,\frac{180\ a}{2}.$$

A trapéz területe helyett vizsgálhatjuk a terület négyzetét:

$$T^2 = \left(\frac{a\ 60}{2}\right)^3 \frac{180\ a}{2} =$$

$$= \frac{27}{16}\,\frac{a\ 60}{3}\,\frac{a\ 60}{3}\,\frac{a\ 60}{3}(180\ \ a).$$

Alkalmazhatjuk a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget!

$$T^2 \quad \frac{27}{16}\left(\frac{3\frac{a\ 60}{3}\ (180\ \ a)}{4}\right)^4 \quad \frac{27}{16}60^4$$

= állandó.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{a\ 60}{3} = 180 - a$, azaz $a = 120$, a trapéz a szabályos hatszög „fele".

A változatosság kedvéért oldjuk meg még egyszer: az 1. ábra jelöléseivel:

$$T = \frac{60\ \ (60\ \ 2x)}{2} m =$$

$$(60 + x)m = (60 + 60\cos\alpha)60\sin\alpha =$$

$$= 60^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

Elegendő tehát a $\sin\alpha(1 + \cos\alpha) := K$ kifejezés legnagyobb értékét meghatározni. Itt vizsgálhatjuk K helyett K^2-et.

$$K^2 = \sin^2\alpha(1+\cos\alpha)^2 =$$
$$= (1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)^2 =$$
$$= (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3 =$$
$$= 27(1-\cos\alpha)\frac{1+\cos\alpha}{3}\frac{1+\cos\alpha}{3}\frac{1+\cos\alpha}{3} \le$$
$$\le 27\left(\frac{(1-\cos\alpha)+3\frac{1+\cos\alpha}{3}}{4}\right)^4 = 27\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

= állandó,

mint az előbbi megoldásban. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $1-\cos\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{3}$, a feltételeket figyelembe véve $\alpha \quad \frac{\pi}{3}$.

Így kell csinálni, vagy másképp?
Hát, nem tudom...

Árokszállási Tibor

Harmadfokú függvények szélsőérték vizsgálata elemi módon

A szélsőérték problémák egyre inkább az érdeklődés homlokterébe kerülnek. Alig van olyan felvételi feladatsor, amely ne tartalmazna ilyen jellegű kérdést. Ez az írás azt mutatja be, hogy miként lehet – differenciálszámítás alkalmazása nélkül – a harmadfokú polinomok vizsgálatára vezető szélsőérték problémákat megoldani.

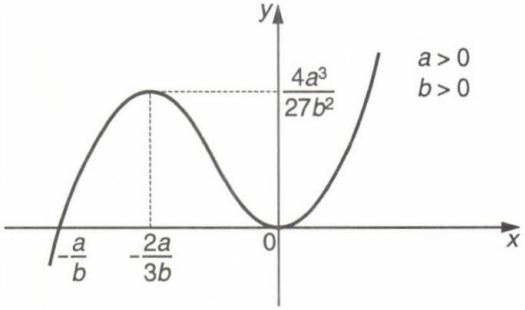
Egy általános probléma megoldása során gyakran célravezető az, ha egy speciális eset tárgyalásával kezdünk. Tegyük most is ezt, és tekintsük az $f(x) = ax^2 + bx^3$ alakú függvényeket, ahol a és b pozitív valós konstansok, f értelmezési tartománya pedig a valós számhalmaz! Az $f(x) = x^2(a + bx)$ alak jól mutatja, hogy függvényünknek csak helyi szélsőértékei lehetnek, hiszen növekvő pozitív x-ek esetén a függvény minden határon túl növekszik, $\frac{a}{b}$-nél kisebb, csökkenő x-ek esetén pedig minden határon túl csökken. Helyi szélsőértékre tehát csakis a $\frac{a}{b} \le x \le 0$ intervallumban számíthatunk. Alakítsuk most függvényünket a következő módon:

$$f(x) = x^2(a+bx) = \frac{4}{b^2}\cdot\frac{b}{2}x\cdot\frac{b}{2}x\cdot(a+bx)!$$

Látható, hogy a vizsgált tartományban a szorzat utolsó három tényezője – a tartomány végpontjait leszámítva – pozitív. Alkalmazható tehát a számtani és mértani közép jól ismert kapcsolata.

$$f(x) \quad \frac{4}{b^2}\left(\frac{\frac{b}{2}x+\frac{b}{2}x+a+bx}{3}\right)^3 \quad \frac{4a^3}{27b^2}$$

Az egyenlőség a tényezők egyenlősége esetén meg is valósul, nevezetesen $x \quad \frac{2a}{3b}$ esetén. Tehát az f függvénynek a vizsgált tartományon maximuma van. Mivel függvényünk a $x = 0$ helyen 0 értékű, és minden más $\frac{a}{b}$-nél nagyobb x esetén pozitív, ezért az $f(x) = 0$ szükségképpen helyi minimum. Az alábbi ábra az f függvény vázlatos grafikonját mutatja.



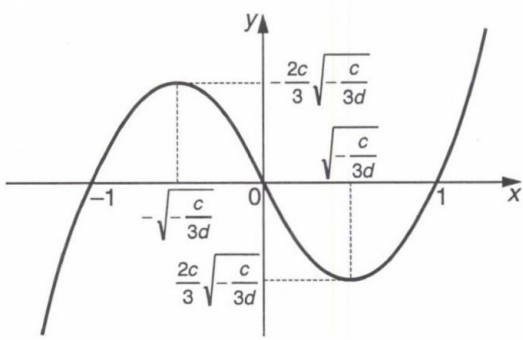
Abban az esetben, ha az $f(x) = ax^2 + bx^3$ függvény konstansainak előjelében változás történik, lényegileg a fenti gondolatmenetet kell megismételnünk. Eltérés csak abban lesz, hogy ezekben az esetekben megváltozik a függvény menete. Például, ha a konstansok negatív előjelűek, akkor x $\frac{2a}{3b}$ -nél helyi minimum, 0-nál helyi maximum adódik. Általában az mondható el most már, hogy az $f(x) = ax^2 + bx^3$ alakú függvényeknek mindig van két különböző típusú helyi szélsőértéke, a szélsőértékek mindig $x = 0$-nál és x $\frac{2a}{3b}$ -nél vannak, a szélsőértékek típusát és előjelét pedig a konstansok előjele (nyilván egyik konstans sem zérus) dönti el.

A továbbiakban ki fog derülni, hogy az $f(x) = cx + dx^3$ alakú függvények szélsőérték vizsgálata visszavezethető az előzőleg már tárgyalt típusú függvények vizsgálatára. Először is megjegyzendő, hogy ha a konstansok azonos előjelűek, akkor nyilvánvalóan semmilyen szélsőértékről sem beszélhetünk, mert ez esetben – a kitevők azonos paritása miatt – f az egész értelmezési tartományon szigorú monoton. Tegyük fel tehát ezek után, hogy a konstansok nem azonos előjelűek! Alkalmazzuk most az alábbi helyettesítést!

$$x \quad \sqrt{\frac{c}{3d}} \quad t$$

Rövid számolás után az adódik, hogy $f(x) = \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3d}} \quad d \; 3\sqrt{\frac{c}{3d}}t^2 \quad t^3$. Ezzel a helyettesítéssel el is értük célunkat, hiszen a $K(t) = d \; 3\sqrt{\frac{c}{3d}}t^2 \quad t^3$ függvény csak egy konstansban tér el f-től. Az előzőleg mondottak szerint K-nak $t = 0$-nál és vele f-nek $x \quad \sqrt{\frac{c}{3d}}$-nél helyi szélsőértéke van, melynek értéke $f\sqrt{\frac{c}{3d}} = \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3d}}$. Vegyük most észre, hogy a jelenleg vizsgált $f(x) = cx + dx^3$ függvény páratlan! Ez azt jelenti, hogy $x = \sqrt{\frac{c}{3d}}$-nél szintén helyi szélsőérték van, amely $f\sqrt{\frac{c}{3d}} = \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3d}}$.

A szélsőérték típusa attól függ, hogy a konstansok előjelviszonyai milyenek. Ha például c negatív és d pozitív, akkor $x \quad \sqrt{\frac{c}{3d}}$-nél helyi minimum, ellenkező esetben ugyanitt helyi maximum lesz. Az alábbi vázlatos grafikon az első esetet mutatja.



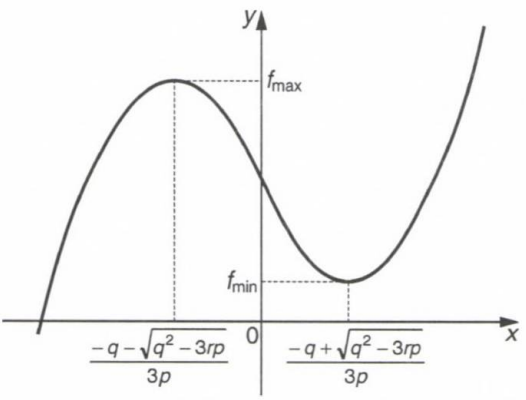
Térjünk rá ezek után az általános eset vizsgálatára, vagyis nézzük az $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ alakú függvényeket! Azt lehet megmutatni, hogy ezek alkalmas helyettesítésekkel megint csak a már előzőleg tárgyalt alakúakká transzformálhatók. Alkalmazzuk az alábbi helyettesítést!

$$x \quad t \quad \frac{q}{3p}$$

Rövid számolást követően adódik a következő alak:

$$f(x) \quad pt^3 \quad r \quad \frac{q^2}{3p} \quad t \quad \frac{2q^3}{27p^2} \quad \frac{rq}{3p} \quad s$$

Ebben a kifejezésben már másodfokú tag nincs. Helyi szélsőérték akkor lehetséges, ha az elsőfokú és a harmadfokú tag előjele különböző. Legyen pl. $p > 0$ és $r \quad \frac{q^2}{3p} \quad 0$. Ekkor átrendezés után adódik, hogy $q^2 > 3pr$. Ugyanez az összefüggés következik akkor is, ha az együtthatók előjelét megfordítjuk. Azt mondhatjuk tehát, hogy a legutóbbi reláció teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy a harmadfokú függvénynek létezzen helyi szélsőértéke. Használjuk most fel az előző pont eredményét, melynek értelmében, ha bevezetjük a $t \quad k \quad \frac{\sqrt{q^2 \quad 3rp}}{3p}$ helyettesítést, akkor egy olyan alakot kell kapnunk, amelynek $k = 0$-nál, azaz $t \quad \frac{\sqrt{q^2 \quad 3rp}}{3p}$-nél helyi szélsőértéke van, és a $g(t) \quad pt^3 \quad r \quad \frac{q^2}{3p} \quad t$ függvény páratlansága miatt $t \quad \frac{\sqrt{q^2 \quad 3rp}}{3p}$ is helyi szélsőérték hely lesz. Az eredeti $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ harmadfokú függvénynek tehát $x_{1,2} \quad \frac{q \quad \sqrt{q^2 \quad 3rp}}{3p}$-nél helyi szélsőértékei vannak. A szélsőértékek típusa és értéke az együtthatóktól függ. Az alábbi vázlatos ábra egy lehetséges esetet mutat.



Végezetül nézzünk meg egy konkrét példát! Tekintsük az $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$!

Alkalmazzuk először az $x \quad t \quad \frac{2}{3}$ helyettesítést! Ekkor adódik az $f \quad t \quad \frac{2}{3} \quad = t^3 \quad \frac{1}{3}t \quad \frac{83}{27}$ alak. Láthatóan a köbös tag és az elsőfokú tag együtthatója ellentétes előjelű, van tehát szélsőérték. Legyen ezek után $t = k + \frac{1}{3}$! Ekkor az $f \quad k \quad \frac{1}{3} \quad = k^3 \quad k^2 \quad \frac{85}{27}$ kifejezés jön ki. Alkalmazzuk ezek után a számtani és mértani közép közti összefüggést!

$$k^3 \quad k^2 \quad \frac{85}{27} \quad 4 \quad \frac{k}{2} \quad \frac{k}{2} \quad (k \quad 1) \quad \frac{85}{27}$$

$$4 \quad \frac{\frac{k}{2} \quad \frac{k}{2} \quad k \quad 1}{3}^3 \quad \frac{85}{27} \quad 3.$$

Tehát eredeti függvényünk maximuma (–3), és ez $x = -1$-nél meg is valósul. Minimumot akkor kapunk, ha $k = 0$, vagyis $x \quad \frac{1}{3}$. A minimum értéke pedig $\frac{85}{17}$ lesz.

Az a tény, hogy a harmadfokú függvények „megadják magukat" az elemi módszereknek, semmiképp sem jelenti azt, hogy az esetek többségében a deriválás egyszerű algoritmusa ne lenne sokkal gyorsabb. Más kérdés persze, hogy a differenciálszámítás alkalmazása már meglehetősen magas matematikai tájékozottságot tételez fel. Középiskolás fokon az elemi utak keresése mindig izgalmasabb. Ha pedig arra gondolunk, hogy a magasabb fokszámú polinom függvények zérushelyeinek meghatározása elvi akadályokba ütközik, akkor azt mondhatjuk, a deriválás módszerének alkalmazása nem is sokkal magasabb rendű. Talán még az is lehetséges, hogy az a szélsőérték probléma, amely a differenciálszámítás alkalmazásával megoldható, szükségképpen olyan, hogy található elemi módszer is a megoldásához.

Dr. Darvasi Gyula

Az általános talpponti háromszög területe

A talpponti háromszög leginkább mint a hegyesszögű háromszögbe írható minimális kerületű háromszög ismert, melynek csúcsai az adott hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjai (1. ábra). Minthogy a hegyesszögű háromszög magasságvonalai a háromszögön belül haladnak és egy pontra – a háromszög magasságpontjára – illeszkednek, ezért a talpponti háromszög csúcsai egyrészt az eredeti háromszög oldalainak belső pontjai, másrészt a háromszög belsejében lévő magasságpontnak a háromszög oldalaira vonatkozó merőleges vetítésével is származtathatók. Ez a származtatási mód ad lehetőséget a talpponti háromszög általános értelmezésére.

Legyen a P pont egy adott ABC háromszög síkjának tetszőleges pontja, s jelölje A_1, B_1, illetve C_1 a P pontból a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, illetve $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjait (2. ábra). Ekkor az $A_1B_1C_1$ (esetleg elfajuló) háromszöget az ABC három szög P pontra vonatkozó általános talpponti háromszögének nevezzük. Azonnal nyilvánvaló, hogy ha a P pont az ABC háromszög magasságpontja, akkor a közönséges talpponti háromszöghöz jutunk vissza. Elfajuló eset pontosan akkor adódik, ha a P pont rajta van az ABC háromszög $k(O, R)$ körülírt körén, s ekkor az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre – a P ponthoz tartozó Simson-egyenesre – illeszkednek.

Az általános talpponti háromszög területének kiszámításához ismernünk kell két oldalának hosszát, és az általuk közbezárt szög nagyságát.

Elsőként az általános talpponti háromszög oldalait határozzuk meg. Ehhez felhasználjuk, hogy a B_1 és C_1 pontok előállítási módja miatt a P pont rajta van az AB_1C_1 háromszög köré írható körön, melynek egyik átmérője az $\overline{AP}$ szakasz. Így az AB_1C_1 valamint az ABC háromszögekre a szinusztételt alkalmazva

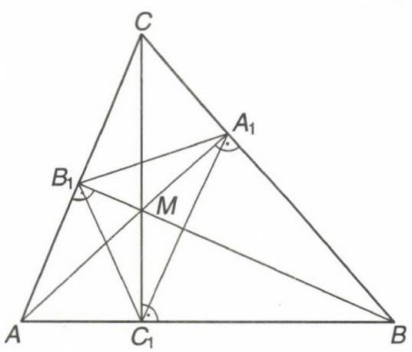
$$AP = \frac{B_1C_1}{\sin A\sphericalangle} \quad \text{és} \quad 2R = \frac{BC}{\sin A\sphericalangle} = \frac{a}{\sin A\sphericalangle},$$

ahonnan

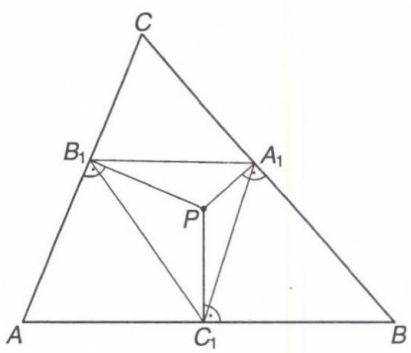
$$B_1C_1 \quad \frac{a}{2R} \quad AP.$$

Észrevehető továbbá, hogy a P pont rajta van még a BA_1C_1 és CA_1B_1 háromszögek köré írható $\overline{BP}$ illetve $\overline{CP}$ átmérőjű körökön is, amiből az előbbihez hasonló módon kaphatók az A_1C_1 $\frac{b}{2R}$ BP és az A_1B_1 $\frac{c}{2R}$ CP összefüggések.

Második lépésként foglalkozzunk az $A_1C_1B_1\sphericalangle$-gel. Ehhez egyelőre tételezzük fel, hogy a P pont az ABC háromszögön belül van, és jelöljük A'-vel az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenes és az ABC három-



1. ábra



2. ábra

szög köré írható $k(O, R)$ körvonal A-tól különböző metszéspontját (3. ábra).
Ekkor egyrészt

$$AP \cdot PA' = R^2 - OP^2,$$
$$PA'B\sphericalangle = AA'B\sphericalangle = ACB\sphericalangle \text{ és}$$
$$\frac{\sin A'BP\sphericalangle}{\sin PA'B\sphericalangle} = \frac{PA'}{BP},$$

másrészt az

$$APB\sphericalangle = PA'B\sphericalangle + A'BP\sphericalangle =$$
$$= AA'B\sphericalangle + A'BP\sphericalangle = ACB\sphericalangle + A'BP\sphericalangle,$$

valamint az

$$APB\sphericalangle = APC_1\sphericalangle + C_1PB\sphericalangle =$$
$$= AB_1C_1\sphericalangle + C_1A_1B\sphericalangle =$$
$$= (B_1CC_1\sphericalangle + CC_1B_1\sphericalangle) + (C_1CA_1\sphericalangle + A_1C_1C\sphericalangle) =$$
$$= (B_1CC_1\sphericalangle + C_1CA_1\sphericalangle) + (A_1C_1C\sphericalangle + CC_1B_1\sphericalangle) =$$
$$= B_1CA_1\sphericalangle + A_1C_1B_1\sphericalangle = ACB\sphericalangle + A_1C_1B_1\sphericalangle$$

összefüggésekből $A_1C_1B_1\sphericalangle = A'BP\sphericalangle$ kapható.

Mindezek alapján az $A_1B_1C_1$ általános talpponti háromszög területe:

$$t(A_1B_1C_{1\triangle}) = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin A_1C_1B_1\sphericalangle =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{a}{2R} \frac{AP}{2R} \frac{b}{2R} \frac{BP}{2R} \cdot \sin A'BP\sphericalangle =$$
$$= \frac{ab}{8R^2} \times AP \times BP \times \frac{PA' \times \sin ACB\sphericalangle}{BP} =$$
$$\frac{ab}{8R^2} \; AP \; PA' \; \frac{c}{2R} \; \frac{R^2 \; OP^2}{4R^2} \; \frac{abc}{4R}$$
$$\frac{R^2 \; OP^2}{4R^2} \; t(ABC_{\triangle})$$

A fenti levezetés ugyanezen képletet adja, ha a P pont az ABC háromszög köré írható körön belül van, vagy arra illeszkedik. Ha viszont $OP > R$, akkor az $A_1C_1B_1\sphericalangle$-gel kapcsolatos előbbi levezetés kissé bonyolultabb, de hasonlóképpen elvégezhető, s ekkor az $A_1B_1C_1$ általános talpponti háromszög területére a

$$t(A_1B_1C_{1\triangle}) = \frac{OP^2 - R^2}{4R^2} \times t(ABC_{\triangle})$$

képlet adódik. Megállapítható tehát, hogy adott ABC háromszög P pontra vonatkozó általános talpponti háromszögének területe arányos a P pontnak az ABC háromszög köré írható $k(O, R)$ körre vonatkozó hatványával, és rögzített OP esetén a $k(O, R)$ körrel koncentrikus körvonal bármely pontjához tartózó talpponti háromszög területe ugyanakkora.

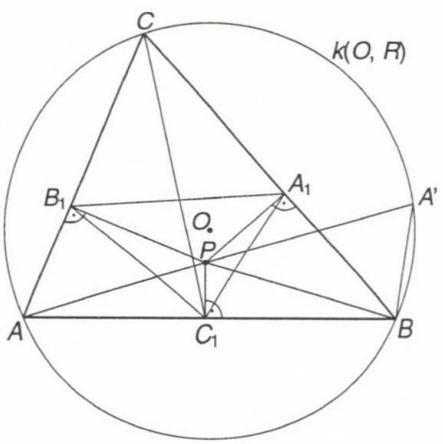
Az általános talpponti háromszög területére kapott fenti képlet ismeretében az [5]-ben megadott feladat (4. ábra) megoldása a következő:

$$\frac{t(EFD_{\triangle})}{t(ABC_{\triangle})} \; \frac{4 \; t(A_1B_1C_{1\triangle})}{t(ABC_{\triangle})} \; \frac{R^2 \; OP^2}{R^2} \; 1,$$

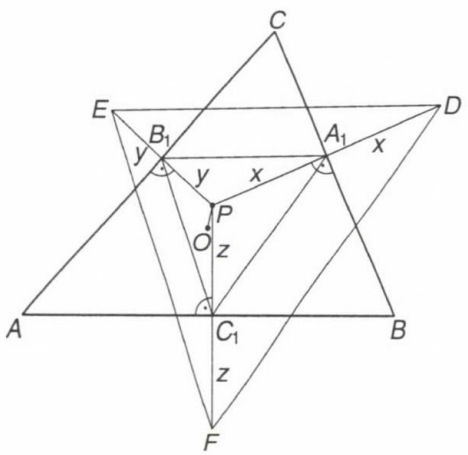
ahol egyenlőség pontosan akkor van, ha $P = O$.

Irodalom

[1] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába
[2] Pelle B.: Geometria
[3] Reimenn I.: A geometria és határterületei
[4] H.S.M.Coxeter – S.L.Greitzer: Az újra felfedezett geometria
[5] A Matematika Tanítása, 2. szám (2000), 21. oldal, 131. feladat.



3. ábra



4. ábra

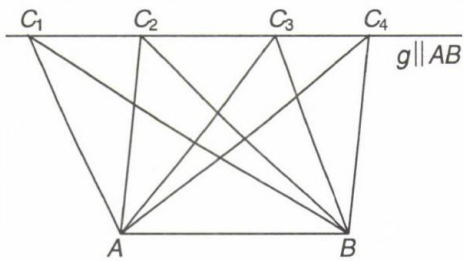
Dr. Darvasi Gyula

Egy TIMSS japán matematikafeladat

A háromszög területének egyik alaptulajdonsága, hogy ha két csúcspont rögzítése esetén a harmadik végigfut a rögzített oldallal párhuzamos egyenesen, akkor a háromszög területe a mozgó csúcs bármely helyzetére ugyanazon érték (1. ábra).

Ezen tulajdonságra alapul a Third International Mathematics and Science Study (= TIMSS) keretében kitűzött egyik japán matematikafeladat:

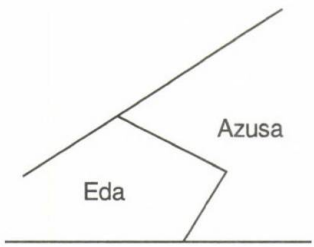
Eda és Azusa telkeit két egyenes fogja közre, és egy töröttvonal alakú kerítés választja el egymástól (2a ábra). Ezt a határoló töröttvonalat kell kiegyenesíteni az eredeti területviszonyok megváltoztatása nélkül.



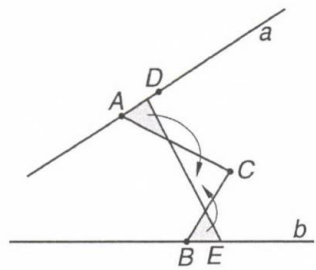
1. ábra

A közrefogó két határvonal legyen az a és b egyenes, a töröttvonal rájuk illeszkedő végpontjai A illetve B, közbeeső csúcsa pedig a C pont. Ekkor az $\overline{AC} \cup \overline{CB}$ töröttvonalat kívánjuk helyettesíteni egy alkalmas $\overline{DE}$ szakasszal (2b ábra). Ehhez rögzített A és B pontok esetén az $\overline{AB}$ oldallal a C ponton át párhuzamost húzunk, amely az a és b egyeneseket F és G pontokban metszi (2c ábra). Ekkor a háromszög területének előbbi tulajdonságát felhasználva adódik, hogy az ABC, ABF és ABG háromszögek egyenlő területűek, vagyis az $\overline{AG}$ és $\overline{BF}$ szakaszok bármelyike egy-egy megoldást jelent a keresett $\overline{DE}$ szakaszra.

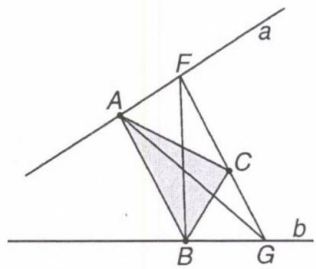
A továbbiakban keressünk olyan helyettesítő $\overline{DE}$ szakaszt, amelyre D az $\overline{AF}$ és E a $\overline{BG}$ szakasz valamely belső pontja (3. ábra). A kitűzött feladat megoldása ekkor egyenértékű az $ABGF$ trapéznak $\overline{DE}$-vel történő két részre osztásával úgy, hogy az $ABED$ négyszög és az ABG háromszög területe egyenlő legyen, mivel az előbbiek szerint az ABG és ABC háromszögek azonos területűek.



a)



b)



c)

2. ábra

1. eset: $\overline{DE} \,||\, \overline{AB}$

1. megoldás

Legyen $\overline{DE}$ szakasz a keresett megoldás, továbbá jelölje H az $\overline{AG}$ és $\overline{DE}$ szakaszok metszéspontját. Ekkor a területre vonatkozó feltétel pontosan akkor teljesül, ha az ADH és EGH háromszögek egyenlő területűek, azaz

$$\frac{1}{2}\cdot AH\cdot DT_1=\frac{1}{2}\cdot HG\cdot ET_2 \Leftrightarrow \frac{AH}{HG}=\frac{ET_2}{DT_1},$$

ahol $\overline{DT_1}$ és $\overline{ET_2}$ a megfelelő magasságok (4. ábra). Ugyanekkor a $DHT_{1\triangle} \sim EHT_{2\triangle}$. $ADH_\triangle \sim AFG_\triangle$ és $EGH_\triangle \sim BGA_\triangle$ hasonlóságok miatt rendre fennállnak az

$$\frac{ET_2}{DT_1}=\frac{HE}{DH},\quad \frac{AH}{AG}=\frac{DH}{FG} \quad \text{és} \quad \frac{HG}{AG}=\frac{HE}{AB}$$

arányok, amelyek alapján

$$\frac{AH}{HG}=\frac{HE}{DH}=\frac{\frac{HG}{AG}\cdot AB}{\frac{AH}{AG}\cdot FG}=\frac{HG\cdot AB}{AH\cdot FG},$$

ahonnan

$$\left(\frac{AH}{HG}\right)^2=\frac{AB}{FG}$$

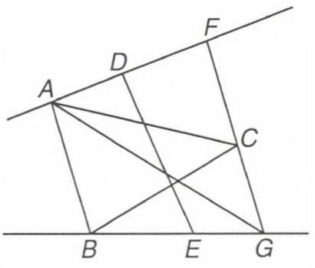
és így

$$\frac{AH}{HG}=\sqrt{\frac{AB}{FG}}=\frac{\sqrt{AB\cdot FG}}{FG}.$$

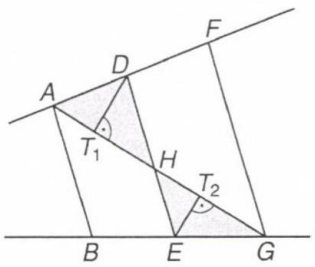
Eszerint a H pont megszerkeszthető, ha az $\overline{AG}$ szakaszt $\sqrt{AB\cdot FG}:FG$ arányban felosztjuk (5. ábra), s ezután $\overline{DE}$ a H ponton át $\overline{AB}$-vel párhuzamosan húzott szakasz.

2. megoldás

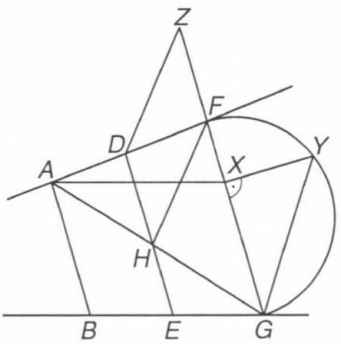
Legyen O az $\overline{AF}$ és $\overline{BG}$ egyenesek metszéspontja (6. ábra).



3. ábra

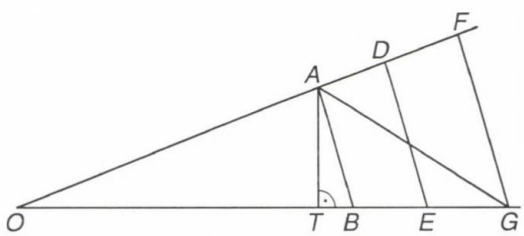


4. ábra



$GX = AB;\ GY = \sqrt{AB\cdot FG} = FZ;\ \overline{AZ} \,||\, \overline{HF}$

5. ábra



6. ábra

Ekkor

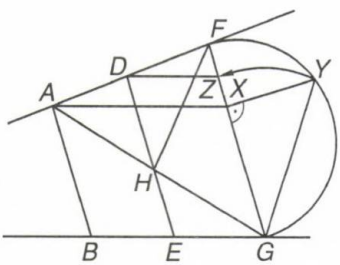
$$t(DEO_\triangle) = t(ABO_\triangle) + t(ABED) =$$
$$= t(ABO_\triangle) + t(ABG_\triangle) = t(AGO_\triangle).$$

Vegyük figyelembe továbbá, hogy $\overline{DE} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{FG}$ miatt $DEO_\triangle \sim ABO_\triangle \sim FGO_\triangle$ teljesül, valamint az AGO és ABO háromszögekre közös az $\overline{AT}$ magasság:

$$\left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{t(DEO_\triangle)}{t(ABO_\triangle)} = \frac{t(AGO_\triangle)}{t(ABO_\triangle)} = \frac{OG}{OB} = \frac{FG}{AB},$$

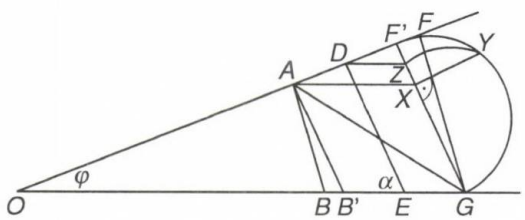
ahonnan

$$DE^2 = \frac{FG}{AB} \cdot AB^2 = AB \cdot FG \Rightarrow DE = \sqrt{AB \cdot FG},$$



$GX = AB;\ GY = \sqrt{AB \cdot FG} = GZ;\ DE = GZ$

7. ábra



$GX = AB';\ GY = \sqrt{AB' \cdot F'G} = GZ;$
$DE = GZ;\ \overline{DE} \parallel \overline{AB'}$

8. ábra

azaz $\overline{DE}$ szakasz az $\overline{AB}$ és $\overline{FG}$ szakaszok mértani közepeként megszerkeszthető (7. ábra).

2. eset: $\overline{DE} \nparallel \overline{AB}$

A megoldást visszavezetjük az 1. esetre.

Legyen α az $m(AGO\sphericalangle) < \alpha < m(ABO\sphericalangle)$ feltételt kielégítő adott szög, és szerkesszük meg az $AB'GF'$ trapézt, ahol $B' \in \text{int}\,\overline{BG}$, $F' \in \text{int}\,\overline{AF}$ és $m(AB'O\sphericalangle) = \alpha = m(F'GO\sphericalangle)$ (8. ábra). Ekkor az 1. eset szerint megszerkeszthető egy olyan $\overline{DE}$ szakasz, amelyre $\overline{DE} \parallel \overline{AB'}$ és $DE = \sqrt{AB' \cdot F'G}$, s ennélfogva $t(AB'ED) = t(AB'G_\triangle)$ teljesül. Ugyanekkor az eddigiek alapján

$$t(ABED) = t(AB'ED) + t(ABB'_\triangle) =$$
$$= t(AB'G_\triangle) + t(ABB'_\triangle) = t(ABG_\triangle)$$

is fennáll, vagyis ez a $\overline{DE}$ szakasz az $ABGF$ trapézra is a keresett megoldás.

Megjegyzendő viszont, hogy $m(ABO\sphericalangle) < \alpha < m(FBO\sphericalangle)$ esetén $B' \in \text{int}\,\overline{OB}$ és $F' \in \overrightarrow{OA} \setminus \overline{OF}$, s ezért az előbbi egyenletben az ABB' háromszög területe levonandó.

A D és E pontok elhelyezkedésére tett fenti korlátozást feloldva lehetségesek még a $D \in \text{int}\,\overline{OA}$ és $E \in \overrightarrow{OB} \setminus \overline{OG}$, valamint a $D \in \text{int}\,\overrightarrow{OA} \setminus \overline{OF}$ és $E \in \text{int}\,\overline{OB}$ esetek, amelyek hasonlóképpen kidolgozhatók.

Irodalom

[1] David L. Pagni and Harris S. Shultz: Extending a (TIMSS) Japanese Lesson Using Trigonometry, Mathematics Teacher, Vol. 92, No. 3 (March 1999), pp. 189-191.

Z. P. Dienes

Varázslatos sokszögek I.

Bevezetés és az egyenlő oldalú háromszög

Amikor elkezdtem sokszögekkel foglalkozni, fel sem fogtam, hogy ezek a matematikai teremtmények a matematika milyen messzi területeire vezethetnek. Csak néhány egyszerű és vidám játékot terveztem háromszögekkel, négyzetekkel és szabályos ötszögekkel, mely játékokat összekapcsolhatunk a szorzás gyakorlásával, ami önmagában elég unalmas feladat! Így néhány igazán egyszerű megfigyeléssel szeretném elkezdeni, és utána fokozatosan szédítő magasságokba emelni ezeket a problémákat.

Ebben a cikkben először megpróbálom megmutatni, hogy hogyan lehet szabályos sokszögeket felhasználni 100-nál kisebb számok szorzásának gyakorlására (később még egészen 289-ig eljuthatunk!), sőt mindezt úgy, hogy ezalatt még a szabályos sokszögek szimmetriájáról és forgatásairól is sok mindent megismerjünk. Egy szabályos sokszög minden egyes elforgatásához és minden egyes tükrözéséhez pontosan egy szorzás fog tartozni, mindig a geometriai transzformációnak megfelelő szám alapján. Pontos leírást fogok adni, hogy hogyan kell egy ilyen „varázslatos sokszöget" elkészíteni szabályos háromszög, négyzet és szabályos ötszög esetében. Hatszög és nyolcszög esetében nem szükséges a sokszög oldalaira számokat írnunk. Hétszög és nyolcnál több csúcsú sokszögek esetén a számokat táblázatban adom meg.

Később megvizsgáljuk, hogy mi történik, ha megpróbálunk szorzókat találni ezekhez a szorzókhoz, sőt szorzók szorzóinak a szorzóihoz jutni és így tovább. Így a számtan alig észrevehetően algebrai megfontolásokhoz vezet. Az olvasó, legyen bár egy tízéves gyermek, vagy egy matematikaprofesszor, a következőkben mindenképpen találhat valami számára kihívó témát, amin érdemes elgondolkodnia.

A szabályos háromszög

A háromszög egyik oldalát (lapját) az 1. ábra szemlélteti.

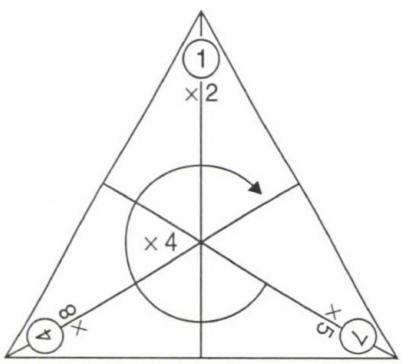
A szorzásokat modulo 9 kell értenünk. Ez azt jelenti, hogy bármelyik szorzatként kapott 8-nál nagyobb eredményből 9-et vagy 9 többszörösét le kell vonnunk (vagyis eredményül 0 és 8 közötti számot kell kapnunk). A megmaradt érték lesz a szorzás eredménye.

A háromszög hátlapján egy bekarikázott 2-es kell hogy álljon a bekarikázott 1-es „mögött", alatta $\times 5$ írva, ugyanúgy, ahogy a bekarikázott 1-es alatt $\times 2$ szerepel. A bekarikázott 4-es és $\times 8$ helyett a hátoldalon írjunk bekarikázott 5-öst és $\times 8$-at, valamint a bekarikázott 7-es „mögé" írjunk bekarikázott 8-ast, alatta $\times 2$-vel. (lásd 2. ábra).

A hátoldalon kör alakú nyíl az óramutató járásával ellenkező irányba mutasson, és jelölje a $\times 7$ szorzást.

A bekarikázott számok a szorzandók, az $\times$ jelet követő számok a szorzók.

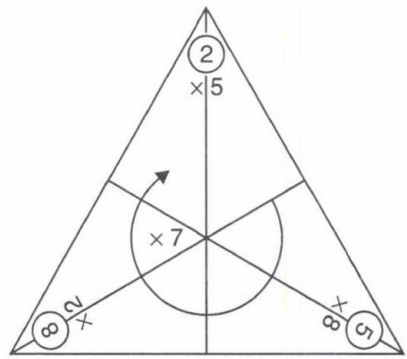
Mikor elkészítettük a háromszöget a fent leírt módon, észrevehetjük, hogy ha a középső nyíl irányában a teljes fordulat egyharmadával elforgatjuk a háromszöget (a háromszög középpontja körül), minden bekarikázott szám helyére a kör alakú nyílban szereplő számszorosa kerül, természetesen 9-et kivonva annyiszor, ahányszor szükséges. Ha a nyíllal ellentétes irányban



1. ábra

forgatunk, akkor minden számot a háromszög hátoldalának közepén szereplő számmal szorzunk meg. Egyébként, ha megfogjuk a háromszöget egy szimmetriatengelyének 2 pontjánál, és átfordítjuk a háromszöget a kiválasztott tengely mentén a másik „lapjára" (vagyis a tengely körül a térben forgatunk 180°-kal), akkor minden bekarikázott számot megszorozva a kiválasztott szimmetriatengelyen szerepelt szorzóval megszorozva éppen azt a számot kapjuk, ami az átfordítás után a szorzandó helyén szerepel.

A fentieket a következőképpen rendszerezhetjük:



2. ábra

számok	1	4	7	(bekarikázott számok)	
szorzók	×2	×8	×5	óramutató járásával egyező irányban ×4	ellentétes irányban ×7
számok	2	5	8	(bekarikázott számok)	
szorzók	×5	×8	×2	óramutató járásával egyező irányban ×7	ellentétes irányban ×4

A táblázat alsó 2 sorában szereplő számok éppen a felső 2 sorban szereplő számok „mögött" találhatók a háromszög másik oldalán.

Észrevehetjük, hogy a bekarikázott számok 3-mal nőnek, ha a nyíl irányában a teljes fordulat harmadával elforgatjuk a háromszöget középpontja körül (az eredményből 9-et mindig kivonva, ha szükséges). Ha a nyíllal ellentétes irányban forgatjuk el a háromszöget hasonlóképpen, akkor a számok 6-tal nőnek.

Még egy dolgot észrevehettünk; ha 2 egymás „mögötti" számot összeszorzunk, eredményül mindig 2-t kapunk (természetesen 9-et annyiszor kivonva, ahányszor szükséges). Ez azért történik így, mert a bekarikázott 1-es alatt a 2 szerepel szorzótényezőül. Hasonló tulajdonságokat vehetünk észre más sokszögek esetében is.

A négyzet

A négyzet esetében 8 bekarikázott számunk lesz, a négyzet mindkét felén („lapján") 4-4, melyek az oldalak középpontjainál helyezkednek el. Minden bekarikázott szám alá egy szorzót írunk, jelölve, hogy mi történik, ha megforgatjuk a négyzetet a körül a szimmetriatengely körül, amelyre a kérdéses szorzó került. Az átlókra is kerülnek szorzók, következő táblázat megmutatja, hogy hogyan kell ezeket elhelyezni. A számokat az előző számhoz képest mindig balra írjuk, vagyis a négyzetet az óramutató járásával ellenkező irányba forgassuk, ahogy a számokat sorban a négyzetre írjuk:

1. „lap"	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló
szám	1		5		9		13	
szorzó (×)	3	7	11	15	3	7	11	15

2. „lap"	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló
szám	3		7		11		15	
szorzó (×)	11	7	3	15	11	7	3	15

A négyzet egyik felét a 3. ábra, a másik felét a 4. ábra mutatja.

Az azonos oszlopokban szereptő számok egymás „mögé" kell hogy kerüljenek, a felső táblázatban levők a négyzet egyik felére (1. „lap"), az alsó táblázatban levők a másik felére (2. „lap"). Ez a 2. „lap"-on az óramutató járásával megegyező irányban való elforgatást jelent a táblázatban 2 egymást követő számra vonatkozóan.

Minden eredményül kapott szorzatból ki kell vonnunk 16 megfelelő többszörösét. 2 egymás „mögötti" szám szorzata mindig 3, mert a bekarikázott 1-es alá 3-at választottunk szorzóul. (Ne felejtsünk el 16-ot kivonni mindig, ha szükséges!)

Hogy a következő szorzót megkapjuk, mindig 4-et kell hozzáadnunk az előző szorzóhoz, és levonni 16-ot, ha szükséges.

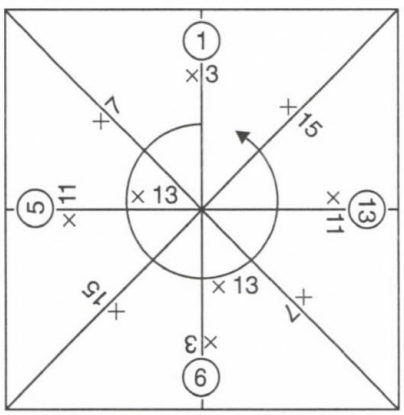
Az ötszög és a hatszög

Az 5. ábra mutatja a szabályos ötszög esetén a számok elrendezését. Az ötszög esetében a bekarikázott 1-esnek és 3-asnak kell egymás „mögött" állnia, míg a hatszög esetében a bekarikázott 1-es és 5-ös helyezkedik el hasonlóan. Ötszög esetében MOD 25 kell számolnunk, ami azt jelenti, hogy ahol csak tudunk, mindig ki kell vonnunk 25-öt az eredményből. A hatszög esetében MOD 36 kell számolnunk.

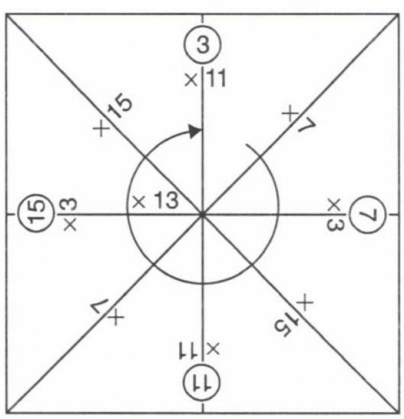
Az ötszögnél 2 egymást követő bekarikázott szám különbsége az egyik oldalon 5, a másik oldalon 15.

2 egymás „mögötti" bekarikázott szám szorzata mindig 3, 25 megfelelő többszörösének kivonása után.

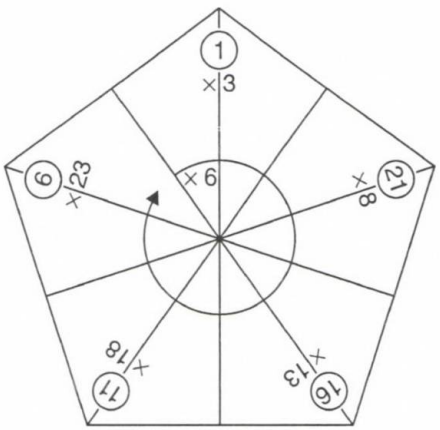
A 6. ábra mutatja az ötszög másik oldalát („lapját"). A bekarikázott 1-es és 3-as álljon egymás mögött.



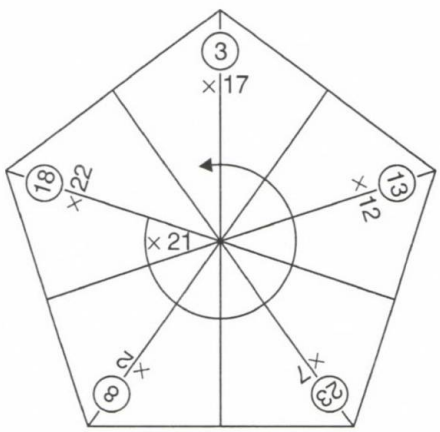
3. ábra



4. ábra



5. ábra



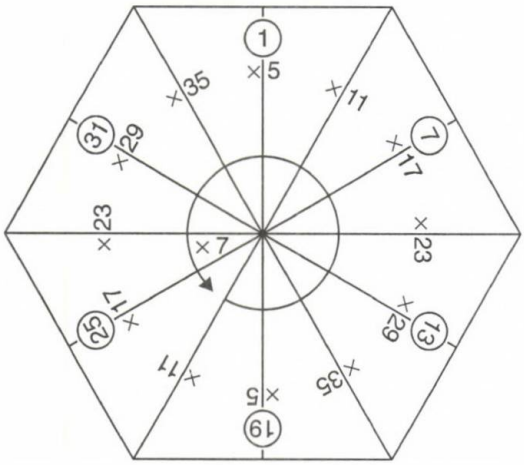
6. ábra

A szabályos hatszög esetében mindig 36 megfelelő többszörösét kell kivonnunk bármely eredményül kapott szorzatból, tehát itt MOD 36 kell számolnunk.

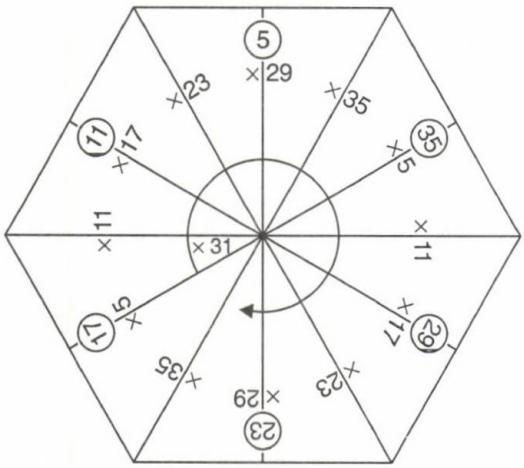
Az egyik oldalon két egymást követő szám különbsége mindig 6, a másik oldalon $30 = 5 \times 6$, mivel 5-öt választottunk szorzóul a bekarikázott 1-es alá.

Két egymás „mögötti" szám szorzata mindig 5, természetesen, ha szükséges, 36-ot kivonva az eredményből.

Ha a hatszöget síkjában elforgatjuk a teljes fordulat tizenketted részével a nyíl irányában úgy, hogy az első (7. ábrán látható) lap legyen felül, a szorzók 6-tal nőnek, A másik lapon ugyanez akkor teljesül, ha a nyíllal ellenkező irányban forgatunk (8. ábra).



7. ábra



8. ábra

A hétszög, a nyolcszög, a kilencszög és a tízszög

A szabályos hétszögön a következőképpen helyezhetjük el a számokat:

számok	1	8	15	22	29	36	43
szorzók	2	23	44	16	37	9	30

az óramutató járásával megegyező irányú fordulat $= \times 8$

számok	2	37	23	9	44	30	16
szorzók	25	32	39	46	4	11	18

az óramutató járásával ellentétes irányú fordulat $= \times 43$

Bármely szorzatból, melyet eredményként kapunk, ki kell vonni 49 megfelelő többszörösét. Észrevehetjük, hogy a hétszög egyik felén az egymást követő számok közti különbség 7, a hétszög másik oldalán („lapján") pedig 14. Ez azért van így, mert a bekarikázott 1-es alatt a 2 szerepel szorzóként.

A szorzók a sokszög egyik felén 21-gyel, míg a másik felén 7-tel nőnek.

A szabályos nyolcszögön a következő számok szerepelnek. A rövidítések: F1 – a sokszög egyik „lapja"; F2 – a sokszög másik fele; s oldalt, d pedig átlót jelent; N a számokat jelöli, X pedig a szorzót.

F1	s	d	s	d	s	d	s	d
N	1		9		17		25	
X	3	43	19	59	35	11	51	27

F1	s	d	s	d	s	d	s	d
N	33		41		49		57	
X	3	43	19	59	35	11	51	27

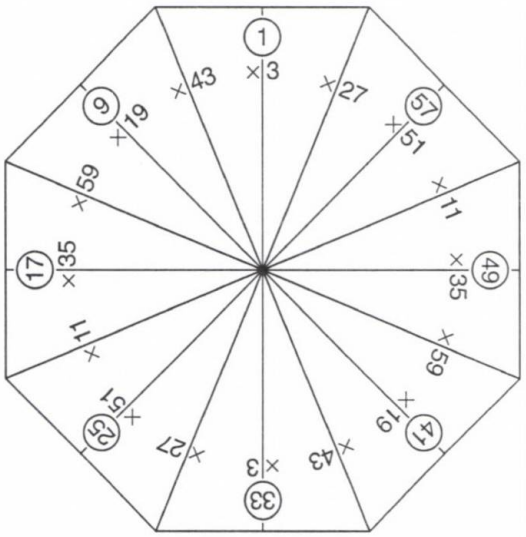
az óramutató járásával megegyező irányú fordulat $= \times 9$

F2	s	d	s	d	s	d	s	d
N	3		43		19		59	
X	43	3	27	51	11	35	59	19

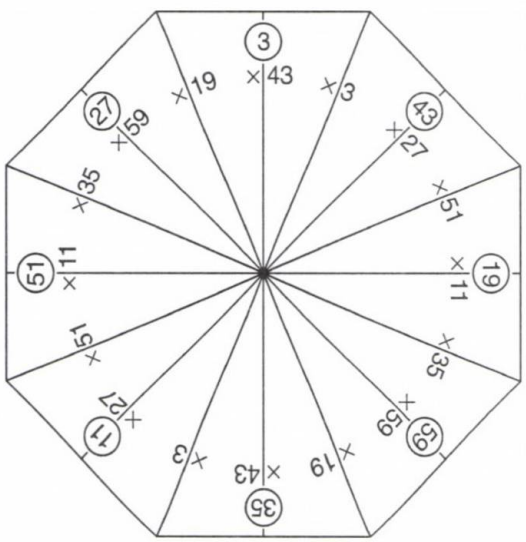
F2	s	d	s	d	s	d	s	d
N	35		11		51		27	
X	43	3	27	51	11	35	59	19

az óramutató járásával ellentétes irányú fordulat $= \times 57$

Minden szorzatból, amit itt eredményként kapunk, 64 megfelelő többszörösét ki kell vonnunk. A nyolcszög esetében MOD 64 kell számolnunk. A nyolcszög egyik felén (9. ábra) az egymást követő számok különbsége 8, míg a nyolcszög másik felén $24 = 3 \times 8$. Azért ennyi ez a különbség, mert a 3-at választottuk az 1 alá szorzótényezőül. A 9. ábra mutatja a szabályos nyolcszög egyik „lapját". A 10. ábra mutatja a szabályos nyolcszög másik felét.



9. ábra



10. ábra

A következő táblázat tartalmazza a szabályos kilencszöghöz tartozó számokat:

1	s	d	s	d	s	d	s	d	s
N	1		10		19		28		37
X	2	65	47	29	11	74	56	38	20

1	d	s	d	s	d	s	d	s	d
N		46		56		64		73	
X	2	65	47	29	11	74	56	38	20

az óramutató járásával megegyező irányú fordulat = × 10

1	s	d	s	d	s	d	s	d	s
N	2		65		47		29		11
X	41	5	50	14	59	23	68	32	77

1	d	s	d	s	d	s	d	s	d
N		74		56		38		20	
X	41	5	50	14	59	23	68	32	77

az óramutató járásával ellentétes irányú fordulat = × 73

Ebben az esetben minden szorzatból, amit eredményként kapunk, 81 megfelelő többszörösét kell kivonni. Kilencszög esetében MOD 81 kell számolnunk.

A szabályos kilencszög esetében az egymást követő bekarikázott számok közti különbség 9 az egyik „lapon", míg a kilencszög másik felén 18. Azért ennyi a különbség, mert a bekarikázott 1-es alá a × 2 szorzót választottuk.

A szabályos tízszög egyik feléhez tartozó számokat a következő sorokban találhatjuk. Az első sorban a bekarikázott számokat találhatjuk, melyeket a tízszög oldalaira kell írnunk. A második sor a szorzókat adja meg. Az egymást követő bekarikázott számok közti különbség 10.

1		11		21		31		41	
3	73	43	13	83	53	23	93	63	33
51		61		71		81		91	
3	73	43	13	83	53	23	93	63	33

az óramutató járásával megegyező irányú fordulat = × 11

A szabályos tízszög másik felén található számok a következők:

3		73		43		13		83	
67	37	7	77	47	17	87	57	27	97
53		23		93		63		33	
67	37	7	77	47	17	87	57	27	97

az óramutató járásával ellentétes irányú fordulat = × 91

Bármely eredményül kapott szorzatból ki kell vonnunk 100 megfelelő többszörösét. Tízszög esetében MOD 100 kell számolnunk. A legkönnyebben úgy számolhatunk, ha mindig csak az eredmény utolsó két számjegyét vesszük figyelembe. Egymást követő számok 30-cal térnek el egymástól, mivel a 3-at választottuk szorzóul a bekarikázott 1-es alá.

A tízszög két felén található egymás „mögötti" számok szorzata mindig 3, ha csak a szorzat utolsó két számjegyét vesszük figyelembe.

A szabályos *n*-szög

Következtetni tudunk már a megvizsgált példák alapján az általános esetre? Ahhoz, hogy általános képet kapjunk, a sokszögeken a szomszédos számokat kell vizsgálnunk, de nem a különbségüket, hanem inkább a hányadosukat!

Tegyük fel, hogy van egy szabályos sokszögünk, amelynek *n* oldala van (szabályos *n*-szög).

A következőket könnyen megállapíthatjuk a példák alapján:

Minden szorzatot MOD n^2 kell értenünk.

Minden zárójeles számot, melyet vessző választ el egymástól, *n* alapú számrendszerben kell olvasnunk (csakúgy, mint MOD n^2-ben). A vessző előtti szám az *n*-ek számát, a vessző utáni szám pedig az egyesek számát jelenti majd.

Kezdjük el úgy, hogy leírjuk az 1-et (mely *n* alapú számrendszerben (0,1)-et jelent), bekarikázzuk, és helyezzük a szabályos *n*-szöget úgy, hogy ez az egyes a legtávolabb essen tőlünk.

Most forgassuk el az *n*-szöget a középpontja körül az óramutató járásával megegyező irányba a teljes fordulat *n*-ed részével, és arra a helyre, amely most a legtávolabb esik tőlünk, írjuk az (1,1) számot.

Forgassuk el a sokszöget úgy, mint az előzőekben tettük, és írjuk a sokszögre a $2n + 1 =$ $= (1,1) \times (1,1)$ számot *n* alapú számrendszerben MOD n^2.

Folytassuk addig a forgatást és a számok írását, míg el nem érjük az $(1,1)^{n-1}$ számot (vagy ahogy ezt „köznapi nyelven" mondanánk az $n^2 - n + 1$ szám). Minden szám az előtte levőnek (1,1) számszorosa.

Ezzel a módszerrel felírhatjuk a szabályos *n*-szög egyik felén a bekarikázott számokat. Most válasszunk egy *p* számot, melynek nincs közös prímtényezője *n*-nel.

Fordítsuk most meg az *n*-szöget, és írjuk a *p* számot a sokszögre úgy, hogy a bekarikázott 1-es „mögé" kerüljön.

Fordítsuk el az *n*-szöget a középpontja körül a teljes fordulat *n*-ed részével most az óramutató járásával ellentétes irányba, arra a helyre, amely a legtávolabbi helyre esik tőlünk, írjuk a következő számot: $(n - 1, 1)$ szorozva *p*-vel.

Fordítsuk el újra a sokszöget, és most az előbb leírt számot szorozzuk meg $(n - 1, 1)$-gyel, és ezt írjuk az *n*-szögre.

Folytassuk ezt a módszert, mindig a teljes fordulat *n*-ed részével forgatva a sokszöget az óramutatóval ellentétes irányba, és az előző lépésben leírt számot szorozzuk meg $(n - 1, 1)$-gyel, majd a kapott számot írjuk le. Tegyük ezt addig, mígnem a sokszög minden oldalára kerül egy bekarikázott szám.

Ne felejtsük el, hogy MOD n^2 kell számolnunk!

Ezt akkor fejeztük be, ha az összes bekarikázott számot elhelyeztük a szabályos *n*-szög hátoldalán. Ha meg akarjuk könnyíteni a számításainkat, akkor írhatjuk a számokat tízes számrendszerben, nem pedig n alapúban.

Mielőtt így számolnánk, külön kell választanunk két esetet aszerint, hogy *n* páros-e vagy páratlan.

Először tekintsük azt az esetet, amikor a sokszög oldalainak száma páratlan.

Fordítsuk vissza a sokszöget úgy, hogy az először megírt fele legyen fölül, a bekarikázott 1-es pedig legyen a legtávolabb tőlünk.

Írjunk a × *p* szorzót a bekarikázott 1-es alá.

Forgassuk el a sokszöget középpontja körül az óramutató járásával egyező irányba a teljes fordulat n-ed részével, és írjuk az $(n-2, 1)$-szer p szorzót az alá a szám alá, amelyhez így jutottunk.

Most újra forgassuk el a sokszöget az óramutató járásával egyező irányba a teljes fordulat n-ed részével, és írjuk azt a szorzót az így elért szám alá, amelyet úgy kapunk, ha az előző lépésben leírt szorzót megszorozzuk $(n-2, 1)$-gyel.

Folytassuk ezt addig, míg az összes bekarikázott szám alá nem kerül egy-egy szorzó. Mikor ezt befejeztük, készen vagyunk az n-szög ezen a felén szereplő szorzók felírásával.

Most fordítsuk a sokszöget a másik felére úgy, hogy a bekarikázott 1-es mögötti szám legyen a legtávolabb tőlünk!

Keressünk egy q számot, melyre teljesül, hogy $pq \equiv 1 \text{ MOD } n^2$, és írjuk ezt a szorzót a bekarikázott p szám alá. Ezután forgassuk el a sokszöget középpontja körül az óramutató járásával egyező irányba a teljes fordulat n-ed részével, és minden forgatás után írjuk azt a szorzót a tőlünk legtávolabb lévő szám alá, amelyet az előző lépésben leírt szorzót $(2, 1)$-gyel szorozva kapunk.

Ha n páros, akkor eddig a lépésig csak a bekarikázott számok alá került szorzóink vannak meg. Azok a szorzók, melyeket az átlókra kell írnunk (és ezen átlók körül térben 180°-kal forgatni meg az n-szöget), még hiányoznak. De semmi probléma! A bekarikázott 1-es melletti átló, mint tengely körül megforgatva a sokszöget, az a szám, mely az 1-es helyére kerül, az lesz a kérdéses átló szorzótényezője. Ezután már elég csak az elforgatásokat végeznünk, és a szorzókat az egymást követő átlókra írni úgy, hogy mindegyik éppen az előző szorzó $(n-2, 1)$-szerese legyen.

Ahhoz, hogy az n-szög másik felén is megtaláljunk egyet a szorzók közül, keressünk egy kicsi szorzót, mely a sokszög első lapján, valamelyik átlón szerepel, és jelöljük s-sel. Keressünk egy számot, melyre teljesül, hogy

$$rs \equiv 1 \text{ MOD } n^2$$

és írjuk ezt az r számot az s szám mögé. Forgassuk el a sokszöget középpontja körül az óramutató járásával ellentétes irányba a teljes fordulat n-ed részével, és írjuk mindig az előző lépésben leírt szorzó $(2, 1)$-szeresét a soron következő átlóra szorzóul addig, amíg az összes átlóra nem kerül egy szám!

Ha a leírást követve felcserélünk minden óramutatóval egyező, ill. ellentétes forgatást, akkor minden ugyanilyen módon fog működni. Valójában észrevehetjük, hogy a szabályos hatszögre adott korábbi példában e két szó fel is van cserélve!

Azok számára, akik nem szeretnének n alapú számrendszerben számolni, a következő módszer segít, hogy a szabályos sokszögre hogyan kell a számokat elhelyeznünk.

A sokszög egyik felén: a bekarikázott számokat kezdjük az 1-es leírásával, forgassuk el a sokszöget (középpontja körül) az óramutató járásával megegyező irányba, és minden lépésben szorozzuk meg az előző lépésben leírt számot $n + 1$-gyel.

A szorzók esetében írjunk $\times p$-t a bekarikázott 1-es alá, és az óramutató járásával megegyező irányba forgatva a sokszöget, minden lépésben szorozzuk meg az előző lépésben leírt szorzót $1 - 2n$-nel, és az eredményül kapott szorzót írjuk a következő bekarikázott szám alá.

A sokszög másik felén: a bekarikázott számok esetében kezdjük p-vel a számok írását, mely a másik „lapon" szereplő 1-es „mögé" kell hogy kerüljön. Forgassuk el a sokszöget (középpontja körül) az óramutató járásával ellentétes irányba, és minden lépésben szorozzuk meg az előző lépésben leírt számot $1 - n$-nel!

A szorzók esetében keressünk egy olyan q számot, melyre teljesül, hogy $pq \equiv 1 \text{ MOD } n^2$, és írjunk $\times q$-t a bekarikázott p alá. Elforgatva a sokszöget az óramutató járásával ellentétes irányba, minden lépésben szorozzuk meg az előző lépésben leírt szorzót $2n + 1$-gyel.

Ha n páros, akkor ugyanaz a módszer alkalmazható, melyet az előbbiekben olvashattunk.

Ne felejtsük el, hogy MOD n^2 kell számolnunk mindig az aktuális n értéket figyelembe véve!

Fordította: Urbán Eszter

Dr. Kántor Sándorné

Az 1997-1999. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák (AHSME) feladatai és megoldási kulcsai I.

Az USA-ban a tehetségek felkutatásának egyik módja a félévszázados hagyományokkal rendelkező Versenyvizsga (AHSME). A tanulók saját iskolájukban írják a versenyt, de országosan azonos időpontban. Az iskola legjobb eredményt elérő tanulója alkotja az iskola csapatát. A versenyvizsga egy 30 feladatból álló feleletválasztós teszt, amelynél a felsorolt 5 válasz közül pontosan egy a helyes. Az 1997-99 közötti időszakban segédeszközként egyszerű zsebszámológép (nem programozható, nem grafikus) használata megengedett volt, de ezen felül csak írópapírt (négyzetrácsosat is),körzőt, vonalzót és szögmérőt szabad használni, bármely más segédeszköz alkalmazása (könyv, jegyzet) tilos. A versenyvizsgán elérhető maximális pontszám: 150 (30 · 5). A versenybizottság a 100 pont feletti teljesítményt elért tanulókat meghívja a verseny 2. fordulójába (AIME), ahol a tanulók egy 15 feladatból álló számválaszos tesztet oldanak meg, szintén az iskolájukban, de országosan azonos időpontban. A két verseny eredménye alapján választják ki a 3. fordulóba kerülő tanulókat (USAMO), akik közül további válogatással kerülnek ki a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia amerikai résztvevői. Az eredményeket, létszámokat, pontszámokat és néhány mintapéldát ma már az Interneten is el lehet érni: Web:http:/www.unl.edu/amc. A versenyek anyaga könyv formájában is megjelent: Problem Book I-V.AHSMEs (1950-1988). A régebbi versenyvizsgák anyaga nagyon jó a versenyekre való felkészüléshez.

Minden teszthez hozzátartozik egy kitűzött cél is. Ennél a tesztnél a cél a legjobb versenyzők gyors kiválogatása, amelyet a Válaszközlő lap számítógéppel való kiértékelése is segít. Az üresen beadott tesztlap 60 pontot (30 · 2) ér, ezért csak jó teljesítmény esetén ad reális eredményt. Másrészről az 5 választási lehetőség biztosítja, hogy tippelni csak akkor érdemes, ha közel járunk a megoldáshoz, sejtjük az eredményt. A saccolás igen veszélyes, mert a rossz válasz esetén 0 pont jár, míg a megválaszolatlan kérdésért 2 pont.

Számunkra érdekes volt az, hogy a feladatok megoldása során szerkesztési eszközök használhatók. Ezt a lehetőséget a versenyzők ki szokták használni, mert elvégzik a szerkesztéseket, méréseket végeznek, és így döntik el, hogy melyik válasz a helyes. Így a geometriai feladatok megoldásánál a külső (szemléletes) fázist választják a belső (elméleti) fázis helyett.

A feladatok kidolgozási ideje: 90 perc. A válaszok kódjait egy erre a célra készített Válaszközlő lapon kell bejelölni a tanulóknak .

A következőkben bemutatjuk az 1997-1999 közti AHSME-k és az 1996. évi AIME feladatait, majd megadjuk a kódokat, kiemeljük a problémát okozó feladattípusokat és fogalmakat.

Az 1997. évi AHSME feladatai

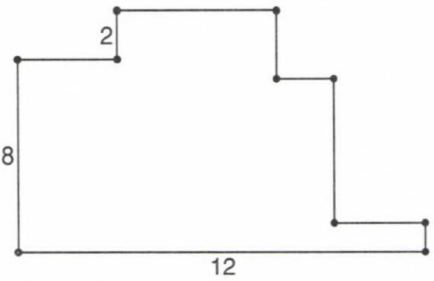
1. Ha a és b olyan számjegyek, melyekre

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & a \\ \times & & b & 3 \\ \hline & & 6 & 9 \\ & 9 & 2 & \\ \hline & 9 & 8 & 9 \end{array}$$

akkor $a + b =$

(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 9 (E) 12

2. Az ábrán látható nyolcszög szomszédos oldalai egymásra merőlegesek. Mennyi a kerülete?



(A) 22 (B) 32 (C) 34 (D) 44 (E) 50

3. Ha az x, y és z valós számokra

$$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=0$$

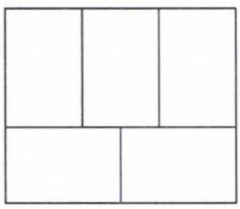
teljesül, akkor $x+y+z=$

(A) –12 (B) 0 (C) 8 (D) 12 (E) 50

4. Ha a 50%-kal nagyobb c-nél, b pedig 25%-kal nagyobb c-nél, akkor a hány százalékkal nagyobb b-nél?

(A) 20% (B) 25% (C) 50%
(D) 100% (E) 200%

5. Egy 176 egység kerületű téglalap öt egybevágó kis téglalapra darabolható az ábrán bemutatott módon. Mennyi egy ilyen kis téglalap kerülete?



(A) 35, 2 (B) 76 (C) 80
(D) 84 (E) 86

6. Tekintsük az

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$$

sorozatot, melynek n-edik tagja $(-1)^{n+1}\cdot n$. Mennyi a sorozat első kétszáz tagjának az átlaga?

(A) –1 (B) –0,5 (C) 0
(D) 0,5 (E) 1

7. Hét egész szám összege –1. Ezen hét szám közül legfeljebb hány darab lehet nagyobb 13-nál?

(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

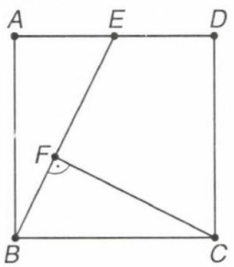
8. A Mientka Könyvkiadó a *Hol van Walter?* című regényt a következő árakon szállítja:

$$C(n)=\begin{cases}12n, & \text{ha } 1\le n\le 24,\\ 11n, & \text{ha } 25\le n\le 48,\\ 10n, & \text{ha } 49\le n,\end{cases}$$

ahol n a megrendelt könyvek száma, $C(n)$ pedig n könyv ára dollárban kifejezve. Vegyük észre, hogy 25 könyv kevesebbe kerül, mint 24 könyv. Az n lehetséges értékei közül hány esetben olcsóbb n-nél több könyvet vásárolni, mint pontosan n darabot venni?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

9. Az ábrán látható 2×2-es $ABCD$ négyzetben E az $\overline{AD}$ szakasz felezőpontja, F pedig a $\overline{BE}$ szakasz egy pontja.



Ha a $\overline{CF}$ szakasz merőleges a $\overline{BE}$ szakaszra, akkor a $CDEF$ négyszög területe

(A) 2 (B) $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{11}{5}$

(D) $\sqrt{5}$ (E) $\frac{9}{4}$

10. Van két darab hatoldalú dobókockánk, melyek szabályosak abban az értelemben, hogy minden oldalukra egyforma valószínűséggel esnek. Azonban az egyik kockán a 4-es helyett 3-as, a másikon pedig a 3-as helyett 4-es van felfestve. Amikor ezekkel a kockákkal dobunk, mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege páratlan szám?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{11}{18}$

11. Az évad hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik kosárlabda mérkőzésén egy játékos

rendre 23, 14, 11 és 20 pontot szerzett. Ily módon a meccsenkénti pontátlaga kilenc mérkőzés után nagyobb lett, mint amennyi az első öt mérkőzés után volt. Ha tíz mérkőzés után az átlaga 18-nál nagyobb lett, minimálisan hány pontot kellett szereznie a tizedik mérkőzésen?

(A) 26 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 30

12. Ha az m és b valós számokra $mb > 0$ teljesül, akkor az $y = mx + b$ egyenletű egyenesre *nem* illeszkedik az a pont, melynek koordinátái

(A) (0; 1997) (B) (0; –1997) (C) (19; 97)
(D) (19; –97) (E) (1997; 0)

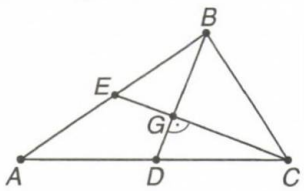
13. Hány olyan kétjegyű pozitív egész N szám van, amelyre az N számjegyeinek felcserélésével kapott szám és N összege egy teljes négyzet?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

14. Egy vadlúdrajban a ludak száma oly módon növekszik, hogy az $n+2$-edik évi populáció létszáma és az n-edik évi populáció létszáma közti különbség egyenesen arányos az $n+1$-edik évi populáció létszámával. Ha 1994-ben, 1995-ben és 1997-ben a populáció létszáma rendre 39, 60 és 123, akkor 1996-ban a populáció létszáma

(A) 81 (B) 84 (C) 87 (D) 90 (E) 102

15. Az ABC háromszög BD és CE súlyvonalai merőlegesek egymásra, $BD = 8$ és $CE = 12$.



Az ABC háromszög területe

(A) 24 (B) 32 (C) 48 (D) 64 (E) 96

16. A

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix három sorösszege és három oszlopösszege megegyezik. Minimálisan hány elem megváltoztatásával érhető el, hogy ez a hat összeg páronként különböző legyen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

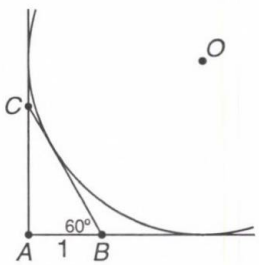
17. Az $x = k$ egyenletű egyenes metszi az $y = \log_5 x$ és $y = \log_5(x+4)$ egyenletű görbék grafikonjait, mégpedig oly módon, hogy a metszéspontok távolsága 0,5. Ha $k = a + \sqrt{b}$, ahol a és b egész számok, mivel egyenlő $a + b$?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

18. Egy egész számokból álló szám n-es módusza 32 (egy szám n-esben a legtöbbször előforduló számot a szám n-es móduszának nevezik, ha több ilyen van, akkor azok a móduszok halmazát alkotják), átlaga pedig 22. A sorozat legkisebb eleme 10. A szám n-es mediánja m, és ez egyenlő a szám n-es egyik elemével. (A szám n-es mediánja: rendezzük sorba a számokat. Ha n páratlan, mondjuk $n = 2k+1$, akkor a középső, tehát a $(k+1)$-edik számot, ha n páros, mondjuk $n = 2k$, akkor a két középső, tehát a k-adik és a $(k+1)$-edik szám átlagát nevezzük mediánnak.) Ha a szám n-esben ezt az elemet kicserélnénk $m + 10$-re, akkor az így kapott szám n-es átlaga 24, és mediánja $m + 10$ lenne. Ha viszont az $m - 8$-ra cserélnénk, akkor a szám n-es mediánja $m - 4$ lenne. Mivel egyenlő m?

(A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 19 (E) 20

19. Egy O középpontú kör érinti a koordinátatengelyeket és annak az ábrán látható 30° – 60° – 90° típusú ABC háromszögnek az átfogóját, amelyben $AB = 1$.



Mekkora a kör sugara két tizedes pontossággal?

(A) 2,18 (B) 2,24 (C) 2,31
(D) 2,37 (E) 2,41

20. A következő egész számok közül melyik írható fel 100 egymást követő pozitív egész szám összegeként?

(A) 1 627 384 950 (B) 2 345 678 910
(C) 3 579 111 300 (D) 4 692 581 470
(E) 5 815 937 260

21. Tetszőleges pozitív egész n esetén legyen

$$f(n)=\begin{cases}\log_8 n, & \text{ha } \log_8 n \text{ racionális szám,}\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Mennyi $\sum_{n=1}^{1997} f(n)$?

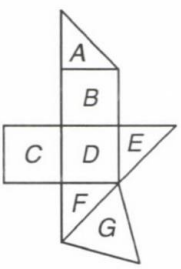
(A) $\log_8 2047$ (B) 6 (C) $\frac{55}{3}$

(D) $\frac{58}{3}$ (E) 585

22. Anna, Béla, Cili, Dani és Emma vásárolni mennek. Mindegyikük költőpénze dollárban kifejezve egész szám, együtt összesen 56 dollárjuk van. Anna és Béla költőpénzének eltérése 19 dollár. Béla és Cili pénzénél az eltérés 7 dollár, Cili és Dani pénzénél 5 dollár, Dani és Emma pénzénél 4 dollár, Emma és Anna pénzénél pedig 11 dollár. Hány dollár költőpénze van Emmának?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

23. Az ábrán látható sokszögek közül A, E és F egyenlő szárú derékszögű háromszögek; B, C és D négyzetek, melyeknek oldalai 1 egységnyi hosszúak; G pedig egy egyenlő oldalú háromszög.



Ezt az alakzatot az élei mentén hajtogatva egy olyan poliédert kapunk, aminek a lapjai ezek a sokszögek. Ennek a poliédernek a térfogata

(A) 1/2 (B) 2/3 (C) 3/4 (D) 5/6 (E) 4/3

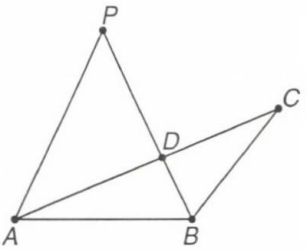
24. *Emelkedő*nek nevezzük az olyan pozitív egész számot (mint például 34689), amelynek minden számjegye nagyobb minden tőle balra álló számjegytől. Összesen $\binom{9}{5} = 126$ darab ötjegyű emelkedő szám van. Ha ezeket növekvőleg felsoroljuk, akkor a sorrendben 97-edik számban nem szerepel a következő számjegy:

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

25. Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, továbbá legyenek az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ és $\overrightarrow{DD'}$ vektorok párhuzamosak és egyirányúak. Ha $AA' = 10$, $BB' = 8$, $CC' = 18$, $DD' = 22$, valamint M és N jelöli rendre az $\overline{A'C'}$, illetve $\overline{B'D'}$ szakasz felezőpontját, akkor $MN =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

26. Adott a síkban az ABC háromszög és a P pont úgy, hogy P egyenlő távolságra van az A és B pontoktól, továbbá az APB szög kétszerese az ACB szögnek. Az $\overline{AC}$ szakasz a $\overline{BP}$ szakaszt a D pontban metszi.



Ha $PB = 3$ és $PD = 2$, akkor $AD \cdot CD =$

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

27. Tekintsük azokat az f függvényeket, amelyekre minden x valós szám esetén teljesül az $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$ egyenlőség. Minden ilyen függvény periodikus, és létezik egy legkisebb közös pozitív p periódusuk. Meghatározandó ez a p periódus.

(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 32

28. Hány darab egész számokból álló rendezett $(a; b; c)$ számhármasra teljesül, hogy

$$|a+b|+c=19 \quad \text{és} \quad ab+|c|=97\,?$$

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 10 (E) 12

29. Egy pozitív valós számot speciálisnak nevezünk, ha a tizedes tört előállításában kizárólag a 0 és a 7 számjegyek fordulnak elő. Például $\frac{700}{99} = 7{,}\overline{07} = 7{,}070707\ldots$ és $77{,}007$ speciális számok. Mennyi az a legkisebb n, amire az 1 felírható n darab speciális szám összegeként?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10
(E) az 1 nem állítható elő véges sok speciális szám összegeként.

30. Tetszőleges pozitív egész n esetén jelölje $D(n)$ az egymás mellett álló különböző számjegyek előfordulásainak a számát az n bináris (2-es számrendszerbeli) felírásában. Például $D(3) = D(11_2) = 0$, $D(21) = D(10101_2) = 4$ és $D(97) = D(1100001_2) = 2$. Hány darab 97-nél kisebb vagy vele egyenlő pozitív egész n esetén teljesül, hogy $D(n) = 2$?

(A) 16 (B) 20 (C) 26 (D) 30 (E) 35

A megoldási kulcs:

C - D - D - A - C - B - D - D - C - D - D - E - E - B - D - D - A - E - D - A - C - E - D - B - B - A - D - E - B - C.

Megjegyzések:

1. Ismerni kell a valószínűség fogalmát és kombinatorikus kiszámítási módját, pl. a 10. feladat megoldásánál szükség van rá.

10. feladat megoldása:

Az összes esetek száma: 36.Ezeket a következő táblázatban adjuk meg:

(1;1)	(1;2)	(1;4)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
(2;1)	(2;2)	(2;4)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
(3;1)	(3;2)	(3;4)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
(3;1)	(3;2)	(3;4)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
(5;1)	(5;2)	(5;4)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
(6;1)	(6;2)	(6;4)	(6;4)	(6;5)	(6;6).

Pontosan 20 esetben lesz a dobott számok összege páratlan, így a keresett valószínűség: 20/36 = 5/9.

2. A módusz és a medián fogalmát is tudni kell. Mivel ez nálunk nem tananyag, ezért a feladat szövegébe, zárójelbe, beírtuk a két fogalom definícióját. Viszont az is igaz, hogy egy teljesen új fogalmat nem szeretnek a diákok azonnal felhasználni, így ennek a feladatnak a megoldását sokan mellőzték.

Módusz: Egy szám n-esben a legtöbbször előforduló számot a szám n-es móduszának nevezzük, ha több ilyen szám van , akkor azok a móduszok halmazát alkotják.

Medián: Egy szám n-es mediánját úgy kapjuk meg, hogy először nagyság szerint sorba rendezzük a számokat. Ha n páratlan (pl. $n = 2k+1$ alakú), akkor a középső szám a medián (tehát a $(k+1)$-edik), ha n páros (pl. $n = 2k$), akkor a két középső szám számtani közepe a medián (tehát a k-adik és a $(k+1)$-edik szám átlaga).

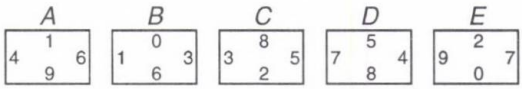
3. Kedvelt feladattéma a függvényegyenletek. Ez az anyagrész sem tartozik bele a középiskolai tananyagba, de versenyeken nálunk is gyakran lehet vele találkozni.

27. feladat megoldása:

Helyettesítsünk x helyére $(x+4)$-et az adott függvényegyenletben: $f(x+8) + f(x) = f(x+4)$, így $f(x+8) = -f(x-4)$. Ha x helyére ismét $(x+4)$-et helyettesítünk, kapjuk, hogy $f(x+12) = -f(x)$. Ha x helyére $(x+12)$-öt helyettesítünk, akkor $f(x+24) = f(x)$-et kapjuk minden x értékre. Így a legkisebb periódus létezik, és ez legfeljebb 24. Másrészről $f(x) = \sin\frac{\pi x}{12}$ függvény periódusa 24 és kielégíti az eredeti függvényegyenletet, így a keresett p periódus 24.

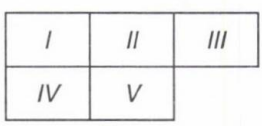
Az 1998.évi AHSME feladatai

1. Öt téglalap minden oldalát megcímkéztük egy-egy egész számmal, ahogy az ábrán látható.



Ezeket a téglalapokat forgatás és tükrözés nélkül az alábbi (I-től V-ig sorszámozott) pozíciókba helyezzük úgy, hogy az egymáshoz illeszkedő oldalak címkéje azonos legyen.

Melyik téglalap kerül az I-es pozícióba?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

2. Jelöljenek az A, B, C és D betűk négy különböző számjegyet a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek közül. Ha $(A+B)/(C+D)$ a lehető legnagyobb egész szám, akkor mennyi $A+B$?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

3. Ha az a, b és c számjegyekre

$$\begin{array}{rccc} & 7 & a & 2 \\ - & 4 & 8 & b \\ \hline & c & 7 & 3 \end{array}$$

teljesül, akkor $a + b + c =$

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

4. Jelölje $[a, b, c]$ az $\frac{a+b}{c}$ hányadost, ahol $c \neq 0$. Mennyi $[[60, 30, 90], [2, 1, 3], [10, 5, 15]]$?

(A) 0 (B) 0,5 (C) 1 (D) 1,5 (E) 2

5. Ha $2^{1998} - 2^{1997} - 2^{1996} + 2^{1995} = k \cdot 2^{1995}$, mivel egyenlő k?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

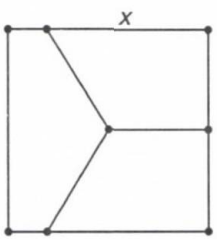
6. Ha az 1998-at felírjuk két pozitív egész szám szorzataként úgy, hogy azok különbsége a lehető legkisebb legyen, akkor ez a különbség

(A) 8 (B) 15 (C) 17 (D) 47 (E) 93

7. Ha $N > 1$, akkor $\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N}}} =$

(A) $N^{\frac{1}{27}}$ (B) $N^{\frac{1}{9}}$ (C) $N^{\frac{1}{3}}$
(D) $N^{\frac{13}{27}}$ (E) N

8. Egy egységoldalú négyzetet az ábrán látható módon két egybevágó trapézra és egy ötszögre daraboltunk, melyek területe egyenlő, úgy hogy a négyzet középpontját összekötöttük a négyzet három oldalának egy-egy pontjával. Meghatározandó a trapézok hosszabbik alapjának (az ábrán x-szel jelölt) hossza.

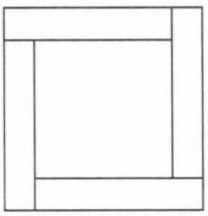


(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{7}{8}$

9. Egy előadó hatvan percen keresztül beszélt hallgatóságához. A közönség húsz százaléka hallgatta végig az egész előadást, tíz százaléka pedig az egészet átaludta. A többi hallgatónak a fele az előadás egyharmadát hallgatta végig, a másik fele pedig az előadás kétharmadát hallotta. A közönség tagjai átlagosan hány percig hallgatták az előadást?

(A) 24 (B) 27 (C) 30 (D) 33 (E) 36

10. Egy nagyobb négyzetet feldarabolunk egy kisebb négyzetre és az azt körülvevő négy egybevágó téglalapra, amint a mellékelt ábrán látható.



Az egybevágó téglalapok mindegyikének 14 egység a kerülete. Mennyi a nagyobb négyzet területe?

(A) 49 (B) 64 (C) 100 (D) 121 (E) 196

11. Legyen R egy téglalap. Hány olyan kör van R síkjában, aminek van olyan átmérője, melynek mindkét végpontja R csúcspontja?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. Ha $\log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N))) = 11$, akkor az N számnak hány különböző prímosztója van?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 7

13. Walter négy darab szabályos hatoldalú dobókockával dobott, és megállapította, hogy a dobott számok szorzata 144. Az alábbi számok közül melyik nem lehetett a dobott számok összege?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

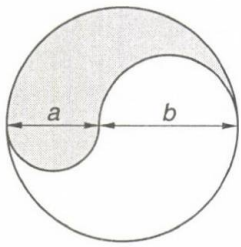
14. Egy parabolának a (4; –5) pontban van a csúcspontja, az x tengellyel pedig két metszéspontja van, egy pozitív és egy negatív abszcisszájú. Ha a parabola egyenlete $y = ax^2 + bx + c$, akkor az a, b és c közül melyik kell hogy pozitív legyen?

(A) csak a (B) csak b (C) csak c
(D) csak a és b (E) egyik sem

15. Egy szabályos hatszög és egy egyenlő oldalú háromszög területe egyenlő. Mennyi a háromszög oldalhosszának és a hatszög oldalhosszának aránya?

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{6}$ (D) 3 (E) 6

16. A mellékelt ábrán egy körvonal és két félkörív egyesítése látható, ahol a félkörök átmérője a és b, továbbá a kör középpontja és a félkörök középpontjai egy egyenesre esnek.



Ekkor a besatírozott tartomány területének és fehér tartomány területének aránya

(A) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (B) $\frac{a}{b}$ (C) $\frac{a^2}{b^2}$

(D) $\frac{a+b}{2b}$ (E) $\frac{a^2+2ab}{b^2+2ab}$

17. Egy $f(x)$ függvényre a következő két állítás teljesül:

(a) tetszőleges x és y valós számokra $f(x+y) = x+f(y)$;

(b) $f(0) = 2$.

Mennyi $f(1998)$ értéke?

(A) 0 (B) 2 (C) 1996
(D) 1998 (E) 2000

18. Egy A térfogatú egyenes körkúpnak, egy M térfogatú egyenes körhengernek és egy C térfogatú gömbnek megegyezik a sugara, továbbá a kúp és a henger közös magassága egyenlő a gömb átmérőjével. Akkor

(A) $A - M + C = 0$ (B) $A + M = C$
(C) $2A = M + C$ (D) $A^2 - M^2 + C^2 = 0$
(E) $2A + 2M = 3C$

19. Hány darab olyan 10 egység területű háromszög van, amelynek csúcsai $(-5; 0)$, $(5; 0)$ és $(5\cos\theta; 5\sin\theta)$ koordinátájú pontok valamilyen θ szög esetén?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

20. Három kártya, amelyek mindegyikére egy-egy pozitív egész szám van felírva, lefordítva fekszik az asztalon. Casey-nek, Stacy-nek és Tracy-nek elmondták, hogy

(a) a számok mind különbözőek,

(b) az összegük 13 és

(c) balról jobbra haladva növekvő sorrendben vannak letéve.

Először Casey megnézi a bal oldali kártyára felírt számot, és így szól: „Nincs elég információm ahhoz, hogy meghatározzam a másik két számot." Azután Tracy megnézi a jobb oldali kártyára felírt számot, és így szól: „Nincs elég információm ahhoz, hogy meghatározzam a másik két számot." Végül Stacy megnézi a középső kártyára felírt számot, és így szól: „Nincs elég információm ahhoz, hogy meghatározzam a másik két számot." Tegyük fel, hogy mindannyian tudják a másik kettőről, hogy ők hibátlanul következtetnek, és hallják az előttük nyilatkozó(k) jelentéseit. Milyen szám van a középső kártyára írva?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
(E) Nincs elég információnk ahhoz, hogy meghatározzuk a számot.

21. Egy h méteres futóversenyen Sunny célba éréskor pontosan d méterrel volt Windy előtt. A következő versenyük alkalmával Sunny sportszerűen d méterrel a startvonalról induló Windy mögött rajtol. Mindkét futó ugyanazzal az állandó sebességgel fut, mint amennyivel az első versenyen haladt. Célba érésekor Sunny hány méterrel van Windy előtt ezen a második versenyen?

(A) $\frac{d}{h}$ (B) 0 (C) $\frac{d^2}{h}$

(D) $\frac{h^2}{d}$ (E) $\frac{d^2}{h-d}$

22. Mennyi

$$\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \ldots + \frac{1}{\log_{100} 100!}?$$

(A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 2 (E) 10

23. Az $x^2 + y^2 = 4 + 12x + 6y$ és az $x^2 + y^2 = k + 4x + 12y$ egyenletű görbék akkor és csak akkor metszik egymást, ha $a \le k \le b$. Meghatározandó $b - a$.

(A) 5 (B) 68 (C) 104 (D) 140 (E) 144

24. Egy 7-jegyű $d_1d_2d_3$-$d_4d_5d_6d_7$ telefonszámot *megjegyezhetőnek* nevezünk, ha a $d_1d_2d_3$ számjegysorozat megegyezik a $d_4d_5d_6$ vagy

a $d_5d_6d_7$ számjegysorozatok valamelyikével (esetleg mindkettővel). Feltéve, hogy minden egyes d_i a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek bármelyike lehet, a megjegyezhető telefonszámok száma

(A) 19 810 (B) 19 910 (C) 19 990
(D) 20 000 (E) 20 100

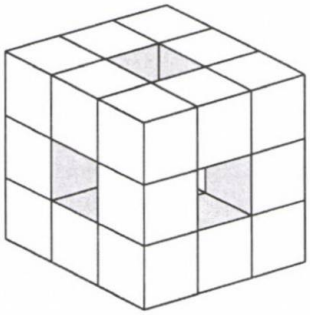
25. Egy milliméterpapírt kétrét hajtottunk úgy, hogy a (0; 2) pont érintkezik a (4; 0) ponttal és a (7; 3) pont érintkezik az $(m; n)$ ponttal. Meghatározandó $m + n$.

(A) 6,7 (B) 6,8 (C) 6,9 (D) 7,0 (E) 8,0

26. Egy $ABCD$ négyszögben az A csúcsnál fekvő szög 120°-os, a B és a D csúcsnál lévő szög egyaránt derékszög, $AB = 13$ és $AD = 46$. Akkor $AC =$

(A) 60 (B) 62 (C) 64 (D) 65 (E) 72

27. Egy $9 \times 9 \times 9$-es kocka huszonhét $3 \times 3 \times 3$-as kockából áll. A nagy kockában „alagúthálózatot" hozunk létre a következőképpen: elsőként kivesszük azt a hat $3 \times 3 \times 3$-as kockát, amelyek a nagy kocka lapjainak közepén vannak, valamint a középső $3 \times 3 \times 3$-as kockát. A második lépésben ugyanígy kilyukasztjuk a megmaradó húsz $3 \times 3 \times 3$-as kockát a középső, illetve lapközépen lévő egységkockák eltávolításával.



Az így keletkező test felszíne

(A) 384 (B) 729 (C) 864
(D) 1024 (E) 1056

28. Az ABC háromszögben a C csúcsnál fekvő szög derékszög és $CB > CA$. A $\overline{BC}$ szakaszon kijelöljük a D pontot oly módon, hogy a CAD szög a DAB szög kétszerese legyen. Ha $AC/AD = 2/3$, akkor $CD/BD = m/n$, ahol m és n relatív prím pozitív egészek. Meghatározandó $m + n$.

(A) 10 (B) 14 (C) 18 (D) 22 (E) 26

29. A koordinátasík $(x; y)$ pontját *rácspont*nak nevezzük, ha x és y egyaránt egész számok. Az olyan négyzetek közül, amelyeknek a belsejében pontosan három rácspont van, a legnagyobbnak a területére (az alábbi számok közül) a legjobb becslés

(A) 4,0 (B) 4,2 (C) 4,5 (D) 5,0 (E) 5,6

30. Legyen minden n pozitív egész számra

$$a_n = \frac{(n+9)!}{(n-1)!}.$$

Jelölje k azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre a_k legkisebb helyi értékű, nullától különböző számjegye páratlan. Ekkor a_k legkisebb helyi értékű, nullától különböző számjegye

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

A megoldási kulcs:

E - E - D - E - C - C - D - D - D - A - D - A - E - A - C - B - E - A - C - C - C - C - D - C - B - B - E - B - D - E.

Megjegyzések:

1. Ebben a feladatsorban is szerepelt függvényegyenlet, a 17. feladat volt ez. Ennek a feladatnak aránylag egyszerű a megoldása: $2 = f(0) = f(-1998 + 1998) = -1998 + f(1998)$, így $f(1998) = 2000$.

2. A 21. feladat fizikai témájú volt. Megoldása problémát okozott. Talán egy ábra készítése, amely szemlélteti a feladatbeli mozgásokat segített volna. A fizikai háttérismeret pedig nagyon egyszerű volt, csak az egyenes vonalú egyenletes mozgás út-sebesség-idő képletét kellett alkalmazni.

3. Nehezen ment a 24. feladat megoldása is. A logikai szita elvének alkalmazásával aránylag könnyen célhoz érhetünk:

$$n = 10^3 \cdot 1 \cdot 10 + 10^3 \cdot 10 \cdot 1 - 10 = 19990.$$

4. A 24-30. feladatok nehézségi foka nem volt arányos a feladatok sorszámával.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**
Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket különkülön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 2001. január 31.**

160. Egy egyenes mentén elhelyeztünk n darab golyót, amelyek mindegyike vagy piros vagy kék színű az alábbi feltételek szerint:
(1) van piros is és van kék is a golyók között;
(2) bármely két golyó, amelyek között pontosan 10 vagy 15 golyó van, azonos színű.
Határozzuk meg n maximális értékét!

Városok Viadala, 1982.

161. Az ABC háromszögben az A, B, C csúcsokkal szemben lévő oldalakhoz hozzáírt körök rendre k_1, k_2, k_3. A BC egyenes a k_1, k_2, k_3 köröket rendre az A_1, A_2, A_3 pontokban érinti. Hasonlóképpen kapjuk az AC egyenesen a B_1, B_2, B_3, az AB egyenesen pedig a C_1, C_2, C_3 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1}\cdot\frac{B_2A_2}{B_2C_2}\cdot\frac{C_3B_3}{C_3A_3}=1!$$

Bíró Bálint, Eger

162. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén

$$\frac{1}{n+3}+\frac{2}{n+5}+\ldots+\frac{n}{3n+1}\le\frac{n}{4}!$$

Tamás Sándor, Csíkszentgyörgy

163. Egy háromszög oldalai a, b, c, a megfelelő oldalakkal szemközti szögei α, β, γ. Jelölje m_a, m_b, m_c a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságokat, f_α, f_β, f_γ pedig a megfelelő belső szögekhez tartozó szögfelezők háromszögbe eső szakaszát. Mutassuk meg, hogy

$$m_a^2f_\beta^2f_\gamma^2+m_b^2f_\gamma^2f_\alpha^2+m_c^2f_\alpha^2f_\beta^2=$$
$$=f_\alpha^2f_\beta^2f_\gamma^2+2m_am_bm_cf_\alpha f_\beta f_\gamma!$$

Bencze Mihály, Brassó

164. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$y^k=x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)$$

egyenletet, ahol m, k pozitív egész, és $k\ge m+1$! (A **145.** feladat egy lehetséges általánosítása.)

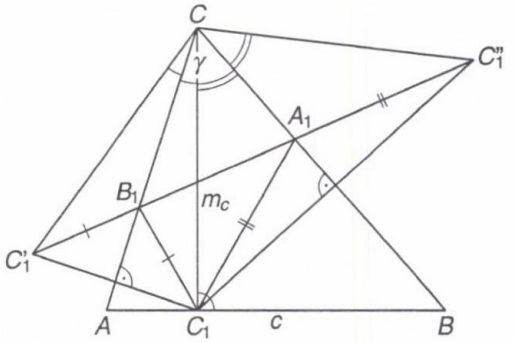
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Feladatmegoldások (143., 145-149. feladatok)

143. Jelölje a hegyesszögű ABC háromszög területét T, körülírt körének sugarát R; a magasságok talppontja által meghatározott $A_1B_1C_1$ háromszög területét t, beírt körének sugarát r. Mutassuk meg, hogy $\frac{T}{t}=\frac{R}{r}$!

Bíró Bálint, Eger

Megoldás: A hegyesszögű háromszög talpponti háromszögét megkaphatjuk úgy is, hogy például a C_1 pontot tükrözzük az AC illetve a BC egyenesre. (*1. ábra*) A kapott C_1', C_1'' pontokat összekötő egyenes kimetszi a B_1 illetve A_1 pontokat. (Fejér Lipót erre vonatkozó bizonyítását lásd például *Rademacher-Toeplitz: Számokról és alakzatokról – Tankönyvkiadó, Budapest 1954.* – 26-30. oldalain.)



1. ábra

A $C_1'C_1''$ szakasz hossza a talpponti háromszög kerülete, jelölje ezt k. Ha $AB = c$ és az AB oldallal szemközti szög γ, akkor $C_1'CC_1'' \sphericalangle = 2\gamma$, valamint $CC_1' = CC_1'' = CC_1 = m_c$.

Ismertek a következő összefüggések: $t = \frac{k \cdot r}{2}$, $T = \frac{c \cdot m_c}{2}$, $c = 2R\sin\gamma$. Írjuk fel a $CC_1'C_1''$ háromszögre a koszinusztételt:

$$k^2 = 2m_c^2 - 2m_c^2 \cos 2\gamma =$$
$$= 2m_c^2(1 - \cos^2\gamma + \sin^2\gamma) = 4m_c^2 \sin^2\gamma.$$

Ebből $k = 2m_c\sin\gamma$. A fenti összefüggések felhasználásával

$$\frac{T}{t} = \frac{c \cdot m_c}{k \cdot r} = \frac{2R\sin\gamma \cdot m_c}{2m_c \sin\gamma \cdot r} = \frac{R}{r},$$

amit bizonyítani kellett.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 14.

145. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$y^k = x^2 + x,$$

ahol k 1-nél nagyobb egész szám!

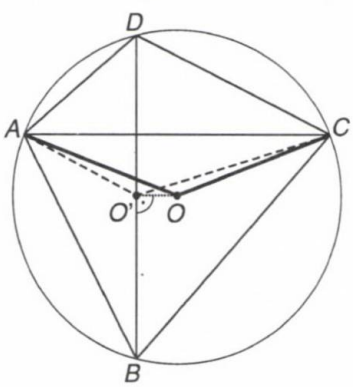
Megoldás: $y^k = x^2 + x = x(x+1)$. Mivel x és $x+1$ relatív prímek, ezért mindketten k-adik hatványok. $k > 1$, ezért $x = 0$ vagy $x = -1$, $y = 0$ és $k > 1$ tetszőleges.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

146. Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, a köréírt kör középpontja O. Mutassuk meg, hogy az AOC töröttvonal felezi a négyszög területét!

Megoldás: A *2. ábra* jeléléseit használjuk.



2. ábra

Jelölje az O pontból a BD átlóra állított merőleges talppontját O'. Könnyen látható, hogy az $AOCD$ négyszög területe megegyezik az $AO'CD$ négyszög területével. O' a BD átló felezőpontja, ezért az $AO'CD$ négyszög területe:

$$T_{AO'CD} = \frac{AC \cdot DO'}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} = T_{AOCD}.$$

Az eredeti négyszög területe:

$$T_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

A fentieket összevetve adódik a feladat állítása.

Horváth Géza, Zselíz
Zsidó Nagy György, Kolozsvár

A megoldók száma: 14.

147. Jelölje $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{101}$ a 2, 3, 4, ..., 102 számok egy permutációját. Adjuk meg a tekintett számok összes olyan permutációját, amelyekre teljesül, hogy a_k osztható k-val bármely $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 101\}$ esetén!

Megoldás: Általánosan vizsgálódunk. Jelölje $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ a 2, 3, ..., n számok egy permutációját, és jelölje $p(n)$ azon permutációk számát, amelyekre teljesül, hogy a_k osztható k-val bármely $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ esetén.

Egy ilyen permutációnál n csak azokra a k sorszámokra kerülhet, amelyek n valamely osztójával egyenlők. Legyen d az n egyik osztója, és legyen $a_d = n$. Ekkor a d-nél nagyobb számok rendre az $a_k = k$ egyenlőségnek tesznek eleget, ugyanis d-nél kisebb szám nem lehet osztható egy d-nél nagyobb számmal. A $d+1, d+2, \ldots, n-1$ számok tehát csak a velük megeggyező sorszámokon szerepelhetnek.

A d-nél kisebb számokat és d-t (ennek helyét n foglalja el) pedig az 1, 2, ..., $d-1$ sorszámokn kell a feltételnek megfelelően elhelyezni, ezt éppen $p(d)$-féleképpen lehet megtenni. Vagyis

$$p(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} p(d).$$

Feladatunkban $n = 102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, így

$$p(102) = p(1) + p(2) + p(3) + p(6) + p(17) + p(34) + p(51).$$

A $p(n)$ függvény értéke az 1 helyen és minden prímszám helyen 1, míg $p(6) = p(1) + p(2) + p(3) = 3$, $p(34) = p(1) + p(2) + p(17) = 3$, $p(51) = p(1) + p(3) + p(17) = 3$.

Így $p(102) = 13$. A 13 megfelelő permutáció:

(1) $a_1 = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1)$;
(2) $a_1 = 51$; $a_{51} = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 51)$;
(3) $a_1 = 34$; $a_{34} = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 34)$;
(4) $a_1 = 17$; $a_{17} = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 17)$;
(5) $a_1 = 17$; $a_{17} = 51$; $a_{51} = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 17; 51)$;
(6) $a_1 = 17$; $a_{17} = 34$; $a_{34} = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 17; 34)$;
(7) $a_1 = 6$; $a_6 = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 6)$;
(8) $a_1 = 3$; $a_3 = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 3)$;
(9) $a_1 = 3$; $a_3 = 6$; $a_6 = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 3; 6)$;
(10) $a_1 = 3$; $a_3 = 51$; $a_{51} = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 3; 51)$;
(11) $a_1 = 2$; $a_2 = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 2)$;
(12) $a_1 = 2$; $a_2 = 6$; $a_6 = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 2; 6)$;
(13) $a_1 = 2$; $a_2 = 34$; $a_{34} = 102$; $a_k = k$ $(k \neq 1; 2; 34)$.

Udvari Tibor, Baja

A megoldók száma: 7.

Megjegyzés: A feladattal foglalkozók közül néhányan azt találták, hogy 7 megfelelő permutáció van. Érdemes meggondolni, mi lehet a hiba a 7-re vezető gondolatmenetben. Ezt a Tisztelt Olvasóra bízzuk.

148. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív valós szám előáll kilenc olyan valós szám összegeként, amelyek tizedestört alakjában csak a 0 és a 7 számjegy szerepel!

Megoldás: Először azt mutatjuk meg, hogy bármely pozitív a valós szám előáll 9 olyan pozitív valós szám összegeként, amelyek tizedestört alakjában csak a 0 és az 1 számjegy szerepel.

Legyen $a = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots}$, ahol a_i $(i = k, k-1, \ldots, 0, -1, \ldots)$ az a szám megfelelő számjegyét jelöli. Konstruáljuk meg az a-t előállító 9 számot a következőképpen:

$$a^{(l)} = \overline{a_k^{(l)} a_{k-1}^{(l)} \ldots a_0^{(l)}, a_{-1}^{(l)} a_{-2}^{(l)} \ldots}, \quad (l = 1, 2, \ldots, 9),$$

ahol

$$a_i^{(l)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } l \leq a_i \\ 0, & \text{ha } l > a_i \end{cases}.$$

A konstrukcióból adódóan $a^{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots, 9)$ minden egyes jegye 0 vagy 1, és

$$a^{(1)} + a^{(2)} + \ldots + a^{(9)} = a.$$

Az eredeti feladat állítása innen már közvetlenül adódik, ugyanis, ha b egy tetszőleges pozitív valós szám, akkor $a = b/7$ előállítható 9 olyan valós szám összegeként, amelyek csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaznak tizedestört alakjukban.

Megjegyzés: Látható , hogy a 7 kicserélhető a tízes számrendszer bármely 0-tól különböző számjegyére.

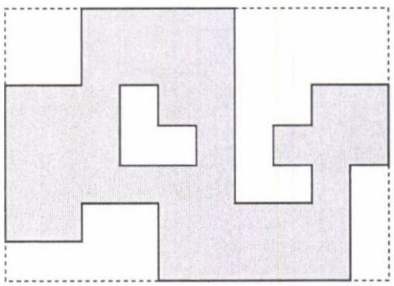
Több megoldás alapján

A megoldók száma: 6.

149. Egy egységnyi oldalú négyzetben adott néhány szakasz úgy, hogy mindegyik párhuzamos a négyzet valamelyik oldalával, és a szakaszok összhossza 18. (A négyzet és a szakaszok is határpontjaikkal együtt értendők.) Igazoljuk, hogy a négyzetben a szakaszok által létrehozott tartományok közül legalább az egyiknek a területe nem kisebb, mint 1/100 !

Megoldás: Tételezzük fel, hogy a szakaszok a négyzetet n tartományra osztják. Jelölje az egyes tartományok területét $t_1, t_2, \ldots, t_n$, kerületét pedig rendre $k_1, k_2, \ldots, k_n$. A feladatban megadott szakaszok azon részszakaszait, amelyek csak egy tartományhoz illeszkednek elhagyjuk, ezáltal az egyes tartományok területe változatlan marad. A megmaradt szakaszok összhossza nem nagyobb, mint 18.

Tekintsünk a tartományok közül egy tetszőlegeset. Tartományunkat a négyzet oldalaival párhuzamos, vagy azokra illeszkedő szakaszokból álló töröttvonal határolja. A határoló párhuzamos szakaszok tartóegyenesei közül a két-két legtávolabbi egy olyan téglalapot határoz meg (*3. ábra*), amely tartalmazza az illető tartományt és kerülete nem nagyobb az illető tartomány kerületénél. (Ezt a téglalapot a továbbiakban a tartományhoz szerkesztett téglalapnak fogjuk nevezni.) Ez utóbbi abból következik, hogy két pont között a négyzet oldalaival párhuzamos szakaszokból összeillesztett út akkor minimális hosszúságú, ha hossza megegyezik annak a téglalapnak a félkerületével, amelynek



3. ábra

átlója a két pontot összekötő szakasz, és oldalai párhuzamosak a négyzet oldalaival.
Ha a és b a tekintett tartományhoz szerkesztett téglalap oldalainak hossza, akkor mivel

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},$$

ezért, ha t_i a tekintett tartomány területe, k_i a kerülete, akkor

$$\sqrt{t_i} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \frac{k_i}{4},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a tekintett tartomány négyzet.
Fenti eredményünket az összes tartományra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i} \le \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i. \qquad (1)$$

Mivel a tartományok kerületeinek összege legfeljebb $2 \cdot 18 + 4 = 40$, ezért (1) alapján

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i} \le 10. \qquad (2)$$

Másrészről a tartományok területeinek összege 1, amiből (2) figyelembe vételével adódik, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i}} \ge \frac{1}{10}. \qquad (3)$$

Becsüljük felülről (3) bal oldalán szereplő törtet.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{t_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i}} \le \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \sqrt{t_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i}} = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{t_i},$$

amit (3)-mal összevetve kapjuk, hogy

$$\max_{1 \le i \le n} \sqrt{t_i} \ge \frac{1}{10}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\max_{1 \le i \le n} t_i \ge \frac{1}{100},,$$

amit bizonyítani akartunk.
Az utolsó becslésnél egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha $t_1 = t_2 = \ldots = t_n$. Fennállhat az is, hogy minden egyes tartomány területe 1/100, mégpedig akkor, ha a tartományok 1/10 oldalú egybevágó négyzetek, amelyek lefedik az eredeti négyzetet.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 8.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (143., 145-147.); Dályay Pál Péter, Szeged (143. 2 mód, 145. 2 mód, 146. 3 mód, 147., 148. 2 mód, 149. 2 mód); Farkas Emese Angéla, Csíkszered (145., 146., 149.); Horváth Géza, Zselíz (143., 145-147., 149.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (143., 145., 146.); Kiss Géza, Kisújszállás (143.); László Sándor, Szombathely (143., 145., 146.); Molnár István, Gyula (143.); Nagy Lajos, Kisújszállás (146., 148.); Schuler László, Budapest (143., 145., 146.); Simon József, Csíkszereda (143., 145., 146., 149. 2 mód); Szász Róbert, Marosvásárhely (143., 145-149.); Tamás Sándor, Csíkszentgyörgy (143.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (143., 145. 3 mód, 146. 3 mód, 147., 149.); Udvari Tibor, Baja (146. 4 mód, 147., 148.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (143., 145., 146., 148., 149.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (143., 146-149.).

* * *

Helyreigazítás: A Matematika Tanítása 2000/4. számában a *Csete Lajos: Egy-egy elemi szorzattá bontási feladat* című cikkben sajnos hibásan jelent meg az 1. feladat megoldása.

A cikkben szereplő hibás megoldás:

$$x = 7\,432\,339\,208\,719 \text{ és } y = 341\,117\,531\,003\,194\,129.$$

A helyes megoldás:

$$x + 1 = 7\,432\,339\,208\,719 \text{ és } y + 1 = 341\,117\,531\,003\,194\,129,$$

így

$$x = 7\,432\,339\,208\,718 \text{ és } y = 341\,117\,531\,003\,194\,128.$$

Másrészt Sierpinskinél a természetes számok a pozitív egészeket jelentik.

Több mint 250 feladat versenyekre készülő diákoknak

A feladatgyűjtemény a Kalmár László Matematikaverseny 1994 és 1998 közötti megyei és országos fordulóinak feladatait, valamint azok megoldásait tartalmazza. A kötet hasznos segítséget nyújthat a versenyekre való felkészüléshez tanárnak, diáknak egyaránt, de színesítheti a szakköri és a tanórai munkát is. Tanár szakos egyetemisták, főiskolások részére is ajánlható feladatösszeállítást tartalmaz.

Megjelenés előtt a Bátaszéki Matematikaverseny feladatai és megoldásai 1990–2000

Szép Magyar Könyv díjas tankönyvsorozat

MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 470-101, 488-282
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73., Tel.: (62) 485-522

MOZAIK
www.mozaik.info.hu